PUNTOS ENTEROS EN POLIHEDROS

FEDERICO CASTILLO

ALTENCOA8-2018
Popayán, Colombia
23 al 27 de julio de 2018

Resumen. Este minicurso tratará sobre el problema de contar puntos enteros en politopos. Esto se hará mediante el llamado *Polinomio de Ehrhart*, relacionado con la *Serie de Ehrhart* que se describe con un vector de enteros llamado el h^*- vector. La idea es explicar las bases de la teoria para al final presentar varios problemas abiertos y activos en el área.

Introducción

Un *polihedro* en el espacio Euclideano D-dimensional $\mathbb{R}^D$ es el conjunto solución de un conjunto finito de desigualdades lineales:

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D : \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in I\rangle\},$$

donde $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^D$, $b_i \in \mathbb{R}$, y I es un conjunto finito de indices. Un *politopo* es un polihedro acotado. Un *punto entero* o *punto reticular* es un punto de $\mathbb{Z}^D$. Contar puntos enteros en politopos es un problema fundamental y de importancia en varias áreas de las matemáticas. Muchas estructuras combinatóricas pueden ser contadas como puntos enteros en politopos. Por ejemplo, emparejamientos en grafos [7], t-designs [8], cuadrados mágicos [2], y extensiones lineales de conjuntos parcialmente ordenados [10], son todos problemas de esta forma. Contar puntos enteros no sólo es un problema de importancia en combinatoria, también tiene aplicaciones en el contexto de la teoría de representaciones [6], geometría algebraica [5], estadística [3] y teoria de números [1].

Este minicurso va a estar divido de la siguiente manera:

1. Definiciones y (muchos) ejemplos.
2. El Teorema de Ehrhart.
3. Problemas abiertos.

1. Resumen general

La estrategia general para estudiar este problema de conteo es generalizarlo un poco. Sea P un politopo reticular (es decir, cuyos vertices son puntos enteros). Vamos a considerar la siguiente función: Por cada entero no negativo t tenemos la dilación $tP := \{t\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$ y definimos

$$i(P, t) := |tP \cap \mathbb{Z}^D|,$$

Key words and phrases. Politopos, Polinomio de Ehrhart, Cuadrados mágicos, h^* vectores.
Combinatoria.

es decir, la cantidad de puntos enteros en la t-dilación de P.

En 1960, Eugene Ehrhart [4] descubrió que para politopos reticulares P la función $i(P,t)$ se comporta bien.

Theorem 1.0.1 (Ehrhart)**.** *Para todo politopo reticular P de dimensión d, la función $i(P,t)$ coincide con un polinomio (de coeficientes reales) de grado d en la variable t.*

Abusando un poco la notación, llamaremos a $i(P,t)$ el *polinomio de Ehrhart* del politopo P, y estudiaremos sus coeficientes. Estos son interesantes, por ejemplo, el coeficiente principal (que junto a t^d) es el vólumen del politopo. En la práctica, el cálculo exacto de este polinomio es NP-dificil, pero veremos algunos ejemplos de interés combinatóricos donde podemos calcularlo.

Un punto de vista alternativo, y muy estudiado es el siguiente. En vez de estudiar $i(P,t)$ directamente, se estudia su función generatriz:

$$E(P,z) := 1 + i(P,1)z^1 + i(P,2)z^2 + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} i(P,k)z^k.$$

El hecho de que $i(P,t)$ sea polinomial de grado d implica que dicha serie formal se puede escribir como

$$E(P,z) = \frac{h_0^* + h_1^* z^1 + \cdots + h_d^* z^d}{(1-z)^{d+1}}.$$

No es dificil ver que los coeficientes h^* son enteros, lo que no es trivial, y fue probado por R. Stanley en 1980 [9], es que son no negativos. El numerador de esa función racional es llamado el polinomio $h^*(P)$. El gran reto es:

Caracterizar todos los posibles $h^*(P)$ polinomios.

Esto es un poco ambicioso, pero hay resultados parciales como por ejemplo desigualdades conocidas y caracterizacion en dimensión 2. Empezando en dimensión 3 pocas cosas se saben pero es una fuente de problemas de investigación activa hoy en día. Al final vamos a discutir lo mas reciente al respecto de esta pregunta.

Agradecimientos. Agradezco a ALTENCOA por la invitación.

Referencias

1. M. Beck, *Counting lattice points by means of the residue theorem*, Ramanujan J. 4(3) (2000), 299?310.
2. M. Beck and S. Robins, *Computing the continuous discretely, second ed.*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2015, Integer-point enumeration in polyhedra, With illustrations by David Austin. MR 3410115.
3. P. Diaconis and A. Gangolli, *Rectangular arrays with fixed margins*, in: Discrete Probability and Algorithms Minneapolis, MN, 1993. IMA Math. Appl., vol. 72. Springer, New York (1995), 15?41.
4. E. Ehrhart, *Sur les polyedres rationnels homothetiques a n dimensions*, R. Acad. Sci. Paris 254 (1962), 616?618.
5. W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies 131. Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.
6. A.N. Kirillov, *Ubiquity of kostka polynomials*, (Eds.), Physics and Combinatorics, Proceedings Nagoya 1999.
7. L. Lovász and M. D. Plummer, *Matching theory*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 121, North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Akad?emiai Kiad?o (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1986, Annals of Discrete Mathematics, 29. MR 859549.

8. A. Nijehuis and H. Wilf, *Representations of integers by linear forms in nonnegative integers*, J. Number Theory 4 (1972), 98?106.
9. R.P. Stanley, *Decompositions of rational convex polytopes*, Ann. Discrete Math. 6 (1980), 333?342, Combinatorial mathematics, optimal designs and their applications (Proc. Sympos. Combin. Math. and Optimal Design, Colorado State Univ., Fort Collins, Colo., 1978). MR 593545.
10. ______, *Two poset polytopes*, Discrete Comput. Geom. 1 (1986), 9?23.

Castillo, F; University of Kansas, USA
E-mail address: `fcastillo@ku.edu`