INTRODUCCIÓN A LAS ÁLGEBRAS NO ASOCIATIVAS Y SUPERÁLGEBRAS.

OLMER FOLLECO SOLARTE.

ALTENCOA8-2018
Popayán, Colombia
23 al 27 de julio de 2018

Resumen. En matemáticas existes diferentes estructuras algebraicas, como los Grupos, Anillos, Campos, Espacios vectoriales, Módulos, etc. Cada una de estas estructuras satisfacen propiedades partículares, y en la mayoría de ellas, la asociatividad es una constante, pero... ¿qué pasa cuando no tenemos esta propiedad?. En este cursillo se da una breve introducción a algunas estructuras algebraicas que no son asociativas, iniciando por los Octonios de Cayley y continuando con estructuras como las Álgebras de Jordan, de Lie, Alternativas y las Superálgebras. Se trabajarán algunas técnicas de estudio que normalmente no son usadas en otras estructuras.

Introducción

Girolamo Cardano (1501-1576), introduce los números imaginarios usandolos para resolver una ecuación de tercer grado. $i = \sqrt{-1}$.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), introduce el término Número Complejo, abriendo el camino para su uso general y sistemático. $\mathbb{C} = \{a + bi\}$.

William Rowan Hamilton (1805-1865), idea los cuaterniones. $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk\}$.

Arthur Cayley (1821-1895), da a conocer los Octoniones. $\mathbb{O} = \{x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7\}$.

1. Cayley-Dickson

Los complejos se pueden ver como pares ordenados de números reales (a, b).

- Suma: componente a componente.
- Producto: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

El conjugado de un complejo viene dado por

$$\overline{(a, b)} = (a, -b).$$

Luego

$$\overline{(a, b)}(a, b) = (a^2 + b^2, 0).$$

Key words and phrases. - Palabras clave y frases: Octoniones, No asociativas, Superálgebras, Jordan, Lie.
Álgebra.

Definimos la norma de un complejo por

$$|z| = (\bar{z}z)_1^{1/2}.$$

Así, si $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$, entonces

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$$

2. El paso de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$

Los cuaterniones se pueden ver como pares ordenados de números complejos (a, b).

- Suma: componente a componente.
- Producto: $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$.

El conjugado de un cuaternio viene dado por

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b).$$

Luego

$$\overline{(a, b)}(a, b) = (|a|^2 + |b|^2, 0).$$

Definimos la norma de un cuaternio por

$$|z| = (\bar{z}z)_1^{1/2}.$$

Así, si $z_1 = ((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ y $z_2 = ((a_1', a_2'), (b_1', b_2'))$, entonces

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2)(a_1'^2 + a_2'^2 + b_1'^2 + b_2'^2) = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2.$$

3. El paso de $\mathbb{H}$ a $\mathbb{O}$

Los octoniones se pueden ver como pares ordenados de cuaternios (a, b).

- Suma: componente a componente.
- Producto: $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$.

El conjugado de un octonio viene dado por

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b).$$

Luego

$$\overline{(a, b)}(a, b) = (|a|^2 + |b|^2, 0).$$

Definimos la norma de un octonio por

$$|z| = (\bar{z}z)_1^{1/2}.$$

Nuevamente, si $z_1 = (((a_1, a_2), (a_3, a_4)), ((b_1, b_2), (b_3, b_4)))$ y $z_2 = (((a_1', a_2'), (a_3', a_4')), ((b_1', b_2'), (b_3', b_4')))$, entonces

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 + a_4'^2 + b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 + b_4'^2) =$$
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 + c_6^2 + c_7^2 + c_8^2.$$

4. Álgebras de Composición

Sea A un espacio vectorial sobre un campo F. Un mapeo $f : A \times A \to F$ es una **forma bilineal** si

- $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$,
- $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$,
- $f(\alpha x, y) = f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$.

f es **simétrica** si $f(x, y) = f(y, x)$.

f es **no degenerada** si $f(a, x) = 0$ para toda x, se sigue que $a = 0$.

Un mapeo $n : A \to F$ es una **forma cuadrática** si

- $n(\lambda x) = \lambda^2 n(x)$,
- $f(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y)$ es una forma bilineal.

n es **estrictamente no degenerada** si f es no degenerada.

Un álgebra A con 1, sobre un campo F, con forma cuadrática n es un **álgebra de composición** si

- $n(xy) = n(x)n(y)$,
- n es estrictamente no degenerada.

5. Cayley-Dickson en general

Un endomorfismo $a \to \bar{a}$ de un álgebra A sobre un campo F es una **involución** si

$$\bar{\bar{a}} = a \text{ y } \overline{ab} = \bar{b}\bar{a}.$$

Fijemos $0 \neq \alpha \in F$ y sea $(A, \alpha) = \{(a_1, a_2)/a_i \in A\}$ una nueva álgebra

- Suma: componente a componente.
- Producto: $(a, b)(c, d) = (ac - \alpha\bar{d}b, da + b\bar{c})$.

Sobre (A, α) definimos la siguiente involución

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b).$$

La forma cuadrática $n(x) = x\bar{x}$ es estrictamente no degenerada sobre (A, α).

Theorem 5.0.1. *Si A es un álgebra de composición, entonces (A, α) es un álgebra de composición si, y sólo si A es asociativa.*

6. Álgebras Alternativas

Un álgebra A sobre un campo F es llamada **alternativa** si

$$x^2 y = x(xy),\ yx^2 = (yx)x.$$

- Si A es un álgebra de composición, entonces A es alternativa.
- (A, α) es alternativa si, y sólo si A es asociativa.
- (A, α) es asociativa si, y sólo si A es asociativa y conmutativa.
- En un álgebra alternativa, cualquier par de elementos generan un álgebra asociativa.
- Toda álgebra alternativa A es de potencias asociativas. Esto es, cada elemento en A genera un álgebra asociativa.

7. Flexibles y Moufang

Un álgebra A sobre un campo F es **flexible** si
$$x(yx) = (xy)x.$$
Un álgebra M sobre un campo F se llama de **Moufang** si es flexible y

- $x(yzy) = ((xy)z)y$,
- $(yzy)x = y(z(yx))$,
- $(xy)(zx) = x(yz)x$.

Theorem 7.0.2. *Toda álgebra alternativa es de Moufang.*

8. Álgebras de Jordan

Las álgebras de Jordan aparecen en 1933, en un trabajo del físico alemán Pascual Jordan sobre fundamentación axiomática de la mecánica cuántica, para formalizar la noción de un álgebra de observables.

Un **álgebra de Jordan** sobre un cuerpo F de caraterística $\neq 2$ es un espacio vectorial J con una operación binária bilineal $(x, y) \to xy$ que satisface
$$xy = yx,\ (x^2y)x = x^2(yx).$$

Theorem 8.0.3. *Toda álgebra de Moufang es de Jordan.*

Si A es un álgebra asociativa sobre un campo F, $charF \neq 2$, entonces el álgebra $A^+ = (A^+, +, \circ)$, donde $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, es un álgebra de Jordan.

Si un álgebra de Jordan es isomorfa con una subálgebra del álgebra A^+, para algún álgebra asociativa A, entonces se llama *especial*, caso contrario se llama *excepcional*.

Los principales ejemplos de álgebras de Jordan son:

- *Álgebras de tipo Hermitiano $H(A, *)$*: Subespacios de elementos simétricos en álgebras asociativas con involución, con respecto al producto simétrico $a \circ b$.
- *Álgebras de tipo Clifford $J(V, f)$*: $J(V, f) = F \cdot 1 + V$, donde V es un espacio vectorial, f una forma bilineal simétrica, 1 es un elemento identidad de J y $u \cdot v = f(u, v) \cdot 1$ para $u, v \in V$.
- *Álgebras de tipo Albert $H(\mathbb{O})$*: Espacios de matrices Hermitianas 3×3 sobre los Octoniones, con respecto al producto simétrico $a \circ b$.

Las álgebras de tipo Hermitiano y Clifford son especiales y las de tipo Albert son excepcionales.

Theorem 8.0.4. *(E. Zelmanov, 1983) Toda álgebra de Jordan simple es de alguno de los tipos Hermitiano, Clifford o Albert.*

9. Álgebras de Lie

Un álgebra L sobre un campo F se llama de **Lie** si

- $xy = -xy$,
- $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$.

Dada un álgebra asociativa A sobre un campo F, podemos definir un nuevo producto en A

$$a \bullet b = ab - ba.$$

La nueva álgebra $A^- = (A, \bullet)$ es un álgebra de Lie.

Theorem 9.0.5. *Toda álgebra de Lie L se puede obtener de la forma A^-.*

10. Superálgebras

- A álgebra, no necesariamente asociativa, sobre un campo F, $Char(F) \neq 2$.
- A es $\mathbb{Z}_2$-graduada, $A = A_0 \oplus A_1$.

A_0 es la parte par, y A_1 es la parte impar.

- Toda álgebra tiene una estructura de superálgebra, donde $A_0 = A$ y $A_1 = 0$. *Trivial.*
- Si A es un álgebra tal que $A^2 = 0$, con $A_0 = 0$ y $A_1 = A$, obtenemos una superálgebra.
- El álgebra de los números duales, $A = F1 \oplus Fx$, con $x^2 = 0$, se puede dotar de estructura de superálgebra, donde $A_0 = F1$ y $A_1 = Fx$.
- Los números complejos $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$ es una $\mathbb{R}$-superálgebra, donde $\mathbb{C}_0 = \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}_1 = \mathbb{R}i$.
- El álgebra $A = F[\mu, \alpha] = F \oplus F\mu$, donde $\mu^2 = \alpha \in F$, es una superálgebra, con $A_0 = F$ y $A_1 = F\mu$. $F[\mu, 1] = F[\mu]$.
- $A = M_{m+n}(F)$, $A_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $A_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$

11. Producto Tensorial Torcido

A y B álgebras sobre un campo F.

$A \otimes B$ tiene estructura de álgebra con $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$.

Si $A = A_0 \oplus A_1$ y $B = B_0 \oplus B_1$ son superálgebras, entonces $A \otimes B$ también es una superálgebra, donde

$$(A \otimes B)_0 = A_0 \otimes B_0 + A_1 \otimes B_1, \text{ y}$$
$$(A \otimes B)_1 = A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0.$$

$A \widetilde{\otimes} B$, denota el *producto tensorial graduado o torcido*, en este caso

$$(a \widetilde{\otimes} b)(a' \widetilde{\otimes} b') = (-1)^{ij} aa' \widetilde{\otimes} bb',$$

donde $a \in A$, $a' \in A_i$, $b \in B_j$ y $b' \in B$.

$\mathbb{C} \widetilde{\otimes} \mathbb{C} \cong \mathbb{H}$,

$1 \widetilde{\otimes} 1 \to 1$, $i \widetilde{\otimes} 1 \to i$, $1 \widetilde{\otimes} i \to j$ y $i \widetilde{\otimes} i \to k$.

12. Álgebra de Grassman

$G_n = \acute{a}lg \left\langle 1, e_1, e_2, \ldots e_n : e_i^2 = 0; e_i e_j = (-1)^{ij} e_j e_i, i \neq j \right\rangle$.

$(G_n)_0$ es la subálgebra generada por todos los elementos de longitud par

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{1_{2k}}.$$

$(G_n)_1$ es la subálgebra generada por todos los elementos de longitud impar

$$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{1_{2k+1}}.$$

13. Envolvente de Grassman

Si $A = A_0 \oplus A_1$ es una superálgebra entonces $G \otimes A$ también lo es.

La *envolvente de Grassman* de A es la parte par de $G \otimes A$, o sea

$$G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1.$$

Si M es una clase de álgebras. A es una M-superálgebra si $G(A) \in M$.

- Superasociativas = asociativas,
- Superconmutativas: $xy = (-1)^{|x||y|}yx$,
- Superanticonmutativas: $xy = -(-1)^{|x||y|}yx$,
- Superlie: $xy = -(-1)^{|x||y|}yx$ y $(xy)z+(-1)^{|x|(|y|+|z|}(yz)x+(-1)^{|z|(|x|+|y|}(zx)y$,
- Superjordan:$xy = (-1)^{|x||y|}yx$ y $((xy)z)t + (-1)^{|y||z|+|y||t|+|z||t|}((xt)z)y + (-1)^{|x||y|+|x||z|+|x||t|+|z||t|}((yt)z)x = (xy)(zt)+(-1)^{|y||z|}(xz)(yt)+(-1)^{|t|(|y|+|z|)}(xt)(yz)$

Agradecimientos. Universidad Nacional de Colombia - Manizales.

Referencias

[Jac] N. Jacobson, Structure and Representation of Jordan Algebras, *Amer. Math. Soc.* Providence, R.I.,(1969).

[JNW] P. Jordan, J. V. Neumann e E. Wigner, On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism, *Ann. of Math.* **(2)35** no.1, 29-64, (1934).

[Kap] I. Kaplansky, Superalgebras, *Pacific J. Math.* **86** no.1, 93-98, (1980).

[KS] E.N. Kuzmin and I.P. Shestakov, Non-associative structures [MR1060322 (91i:17001)]. Algebra, VI, 197–280, Encyclopaedia Math. Sci., 57, Springer, Berlin, 1995.

[Mc] K. McCrimmon, A taste of Jordan algebras, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2004.

[ZSSS] K.A. Zhevlakov, A.M. Slinko, I.P. Shestakov, A.I. Shirshov, *Rings that are nearly associative* [in Russian], Nauka, Moscow (1978), English transl.: Academic Press, New York - London (1982).

Referencias

Folleco, O; Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia

E-mail address: ofollecos@unal.edu.co