

# PROPIEDADES ARITMÉTICAS DE SUCESIONES ASOCIADAS A PARTICIONES DE CONJUNTOS

JOSÉ L. RAMÍREZ

*ALTENCOA8-2018*  
*Popayán, Colombia*  
*23 al 27 de julio de 2018*

RESUMEN. Particiones de conjuntos con restricciones sobre el tamaño de los bloques o sobre el número de elementos especiales producen sucesiones combinatorias que generalizan los bien conocidos números de Stirling y Bell. El objetivo principal de esta charla es mostrar el análisis de algunas propiedades aritméticas de estas nuevas sucesiones. En particular los resultados tienen que ver con el comportamiento  $p$ -ádico de estas sucesiones, así como la generalización de algunas congruencias como las de Touchard y Sun-Zagier. Este trabajo es un resultado en conjunto con I. Mezö (NUIST, Nanjing), V. Moll y D. Villamizar (Tulane University, New Orleans).

## INTRODUCCIÓN

Los números de Stirling de la segunda clase  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  cuentan el número de particiones del conjunto  $[n] := \{1, \dots, n\}$  en  $k$  bloques no vacíos. El total de estas particiones de  $[n]$  se denominan números de Bell ( $B_n$ ). Por lo tanto, se tiene la relación

$$B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}.$$

Varios resultados de divisibilidad de los números de Bell han sido estudiados en la literatura. Por ejemplo, la famosa congruencia de Touchard [?] afirma que

$$B_{n+p} \equiv B_{n+1} + B_n \pmod{p},$$

para todo número primo  $p$ .

En 1981, Gessel [?] demostró que para todo entero positivo  $n$ , existen enteros  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  tal que para todo  $m \geq 0$ ,

$$B_{m+n} + a_{n-1}B_{m+n-1} + \dots + a_0B_m \equiv 0 \pmod{n!}.$$

Recientemente, Sun y Zagier [?] demostraron que para todo primo  $p$  que no divide a  $m$

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{B_k}{(-m)^k} \equiv (-1)^{m-1} D_{m-1} \pmod{p},$$

donde  $D_n$  es el número de desarreglos, es decir el número de  $n$ -permutaciones sin puntos fijos.

---

*Key words and phrases.* Particiones de conjuntos, cálculo umbral, números de Bell, congruencias.

**Combinatoria - Teoría de Números.**

Inspirados en este tipo de resultados, en esta charla mostraremos algunas extensiones y problemas relacionados con otras familias de sucesiones combinatorias asociadas a particiones de conjuntos. En particular, discutiremos algunas propiedades aritméticas de los números de  $r$ -Bell ([?]). Estos cuentan el número de particiones del conjunto  $[n+r]$  tal que los primeros  $r$  elementos están en bloques diferentes (cf. [?]). La segunda generalización que discutiremos son las particiones de conjuntos con restricciones sobre el tamaño de sus bloques. Por ejemplo, considerar bloques cuyo tamaño es a lo más  $m$  (o al menos  $m$ ) (cf. [?, ?]).

Dentro de las propiedades que presentaremos, está la periodicidad, algunas congruencias tipo Touchard y el comportamiento 2-ádico de estas sucesiones combinatorias. Adicionalmente, mostraremos algunos problemas que aún se mantienen abiertos en este tópico.

#### REFERENCIAS

RAMÍREZ, J. L.; DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA (SEDE BOGOTÁ)

*E-mail address:* `j1ramirezr@unal.edu.co`