El método de Galerkin y su aplicación a la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales

Ramiro Acevedo Martínez

Departamento de Matemáticas
Universidad del Cauca

Enero 26 de 2008

Contenido

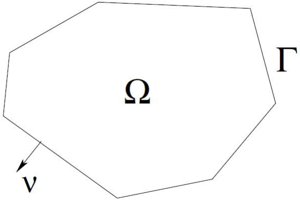
Contenido

Un problema de Dirichlet.

- **El problema de valores de Contorno.**

Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ
$f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\boldsymbol{\kappa} : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ de clase C^1

$$\left\{ \begin{aligned} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa}\nabla u) &= f \qquad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{en } \Gamma. \end{aligned} \right.$$



- **Integración por partes:**

$$-\int_\Omega v \operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\, dx = \int_\Omega (\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\cdot\nabla v\, dx - \int_\Gamma v\,(\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\cdot\boldsymbol{\nu}\, ds$$

- **Formulación variacional:** Hallar $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

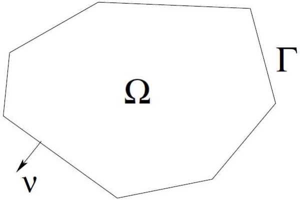
$$\int_\Omega (\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\cdot\nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

Un problema de Dirichlet.

- **El problema de valores de Contorno.**

Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ
$f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\boldsymbol{\kappa} : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ de clase C^1

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa}\nabla u) = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$



- **Integración por partes:**

$$-\int_\Omega v \operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\, dx = \int_\Omega (\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\cdot\nabla v\, dx - \int_\Gamma v\,(\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\cdot\boldsymbol{\nu}\, ds$$

- **Formulación variacional:** Hallar $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tal que

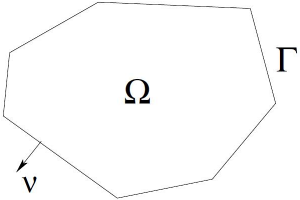
$$\int_\Omega (\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\cdot\nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Un problema de Dirichlet.

- **El problema de valores de Contorno.**

Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ
$f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\boldsymbol{\kappa} : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ de clase C^1

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa}\nabla u) = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$



- **Integración por partes:**

$$-\int_\Omega v \operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\, dx = \int_\Omega (\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\cdot\nabla v\, dx - \int_\Gamma v\,(\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\cdot\boldsymbol{\nu}\, ds$$

- **Formulación variacional:** Hallar $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\cdot\nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

Un problema de Dirichlet.

- **Formulación variacional:** Hallar $u \in H := \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H,$$

donde $A(u,v) := \int_\Omega (\boldsymbol{\kappa}\nabla u) \cdot \nabla v \, dx$, $\quad F(v) := \int_\Omega f v \, dx$

- **Teorema de Lax-Milgram:** Sea H un espacio de Hilbert y sea $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, es decir

$$|A(v,w)| \leq M \|v\|_H \|w\|_H \text{ y } A(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \qquad \forall v,w \in H.$$

Entonces, para todo $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H.$$

Además, $\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H'}$.

Un problema de Dirichlet.

- **Formulación variacional:** Hallar $u \in H := \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H,$$

donde $A(u,v) := \int_\Omega (\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\cdot\nabla v\,dx, \quad F(v) := \int_\Omega f v\,dx$

- **Teorema de Lax-Milgram:** Sea H un espacio de Hilbert y sea $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, es decir

$$|A(v,w)| \leq M\,\|v\|_H\,\|w\|_H \;\text{ y }\; A(v,v) \geq \alpha\,\|v\|_H^2 \qquad \forall v,w \in H.$$

Entonces, para todo $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H.$$

Además, $\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\,\|F\|_{H'}$.

Un problema de Dirichlet.

- **Formulación variacional:** Hallar $u \in H := \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H,$$

donde $A(u,v) := \int_\Omega (\boldsymbol{\kappa}\nabla u)\cdot\nabla v\,dx, \quad F(v) := \int_\Omega f v\,dx$

- **Teorema de Lax-Milgram:** Sea H un espacio de Hilbert y sea $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, es decir

$$|A(v,w)| \leq M \|v\|_H \|w\|_H \;\text{ y }\; A(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v,w \in H.$$

Entonces, para todo $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H.$$

Además, $\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H'}$.

Un problema de Dirichlet.

Teorema de Lax-Milgram Generalizado: Sea H un espacio de Hilbert y sea $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal tal que

- A es acotada: $|A(v,w)| \leq M \|v\|_H \|w\|_H \quad \forall v, w \in H$.
- A es débilmente coerciva:
  - ✓ Para todo $v \in H$:

$$\sup_{w \in H} \frac{A(v,w)}{\|w\|_H} \geq \alpha \|v\|_H \qquad \left(\iff \|A(v)\|_{H'} \geq \alpha \|v\|_H\right).$$

  - ✓ Para todo $w \in H$, $w \neq 0$:

$$\sup_{v \in H} A(v,w) > 0 \qquad \left(\iff \|A^*(w)\|_H > 0\right).$$

Entonces, para todo $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H.$$

Además, $\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H'}$.

Un problema de Dirichlet.

Teorema de Lax-Milgram Generalizado: Sea H un espacio de Hilbert y sea $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal tal que

- A es acotada: $|A(v,w)| \leq M \|v\|_H \|w\|_H \quad \forall v, w \in H$.
- A es débilmente coerciva:
  - ✓ Para todo $v \in H$:

$$\sup_{w \in H} \frac{A(v,w)}{\|w\|_H} \geq \alpha \|v\|_H \qquad \left(\Longleftrightarrow \|A(v)\|_{H'} \geq \alpha \|v\|_H\right).$$

  - ✓ Para todo $w \in H$, $w \neq 0$:

$$\sup_{v \in H} A(v,w) > 0 \qquad \left(\Longleftrightarrow \|A^*(w)\|_H > 0\right).$$

Entonces, para todo $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H.$$

Además, $\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H'}$.

Un problema de Dirichlet.

Teorema de Lax-Milgram Generalizado: Sea H un espacio de Hilbert y sea $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal tal que

- A es acotada: $|A(v,w)| \leq M \|v\|_H \|w\|_H \quad \forall v, w \in H$.
- A es débilmente coerciva:
  - ✓ Para todo $v \in H$:

$$\sup_{w \in H} \frac{A(v,w)}{\|w\|_H} \geq \alpha \|v\|_H \qquad \left(\Longleftrightarrow \|A(v)\|_{H'} \geq \alpha \|v\|_H\right).$$

  - ✓ Para todo $w \in H$, $w \neq 0$:

$$\sup_{v \in H} A(v,w) > 0 \qquad \left(\Longleftrightarrow \|A^*(w)\|_H > 0\right).$$

Entonces, para todo $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H.$$

Además, $\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H'}$.

Un problema de Dirichlet.

Teorema de Lax-Milgram Generalizado: Sea H un espacio de Hilbert y sea $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal tal que

- A es acotada: $|A(v,w)| \le M \|v\|_H \|w\|_H \quad \forall v, w \in H$.
- A es débilmente coerciva:
  - ✓ Para todo $v \in H$:

$$\sup_{w \in H} \frac{A(v,w)}{\|w\|_H} \ge \alpha \|v\|_H \qquad \left(\Longleftrightarrow \|A(v)\|_{H'} \ge \alpha \|v\|_H \right).$$

  - ✓ Para todo $w \in H$, $w \neq 0$:

$$\sup_{v \in H} A(v,w) > 0 \qquad \left(\Longleftrightarrow \|A^*(w)\|_H > 0 \right).$$

Entonces, para todo $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$A(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H.$$

Además, $\|u\|_H \le \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H'}$.

Contenido

El método de Galerkin.

El método de Galerkin:

- Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de H de dimensión finita tal que
  - **a)** $H_h \subseteq H_{\tilde{h}}$ para todo $h \geq \tilde{h}$,
  - **b)** $\bigcup\{H_h : h > 0\}$ es denso en H.
- Esquema de Galerkin: Hallar $u_h \in H_h$ tal que

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \qquad \forall v_h \in H_h.$$

Existencia y unicidad: Existe un único u_h solución del esquema de Galerkin?

Convergencia:

$$\|u - u_h\|_H \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0?$$

El método de Galerkin.

El método de Galerkin:

- Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de H de dimensión finita tal que
  - **a)** $H_h \subseteq H_{\tilde{h}}$ para todo $h \geq \tilde{h}$,
  - **b)** $\bigcup\{H_h \,:\, h > 0\}$ es denso en H.
- Esquema de Galerkin: Hallar $u_h \in H_h$ tal que

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \qquad \forall v_h \in H_h.$$

Existencia y unicidad: Existe un único u_h solución del esquema de Galerkin?

Convergencia:

$$\|u - u_h\|_H \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0?$$

El método de Galerkin.

El método de Galerkin:

- Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de H de dimensión finita tal que
  - **a)** $H_h \subseteq H_{\tilde{h}}$ para todo $h \geq \tilde{h}$,
  - **b)** $\bigcup\{H_h \, : \; h > 0\}$ es denso en H.
- Esquema de Galerkin: Hallar $u_h \in H_h$ tal que

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \qquad \forall v_h \in H_h.$$

Existencia y unicidad: Existe un único u_h solución del esquema de Galerkin?

Convergencia:

$$\|u - u_h\|_H \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0?$$

El método de Galerkin.

El método de Galerkin:

- Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de H de dimensión finita tal que
  - **a)** $H_h \subseteq H_{\tilde{h}}$ para todo $h \geq \tilde{h}$,
  - **b)** $\bigcup\{H_h : h > 0\}$ es denso en H.
- Esquema de Galerkin: Hallar $u_h \in H_h$ tal que

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \qquad \forall v_h \in H_h.$$

Existencia y unicidad: Existe un único u_h solución del esquema de Galerkin?

Convergencia:

$$\|u - u_h\|_H \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0?$$

El método de Galerkin.

El método de Galerkin:

- Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de H de dimensión finita tal que
  - **a)** $H_h \subseteq H_{\tilde{h}}$ para todo $h \geq \tilde{h}$,
  - **b)** $\bigcup\{H_h \, : \, h > 0\}$ es denso en H.
- Esquema de Galerkin: Hallar $u_h \in H_h$ tal que

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \qquad \forall v_h \in H_h.$$

Existencia y unicidad: Existe un único u_h solución del esquema de Galerkin?

Convergencia:

$$\|u - u_h\|_H \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0?$$

Un problema de Dirichlet.

Teorema de Lax-Milgram (caso discreto) Suponga que

- Se cumplen las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram Generalizado.
- Existe $\alpha^* > 0$ independiente de h, tal que
  - ✓ Para todo $v_h \in H_h$: $\quad \sup_{w_h \in H_h} \dfrac{A(v_h, w_h)}{\|w_h\|_H} \geq \alpha^* \|v_h\|_H$
  - ✓ Para todo $w_h \in H_h,\ w_h \neq 0$: $\quad \sup_{v_h \in H_h} A(v_h, w_h) > 0$

Entonces, para todo $F \in H'$ existe un único $u_h \in H_h$ tal que

$$A(u_h, v_h) = F(v_h)\ \forall v_h \in H_h, \quad \text{y} \quad \|u_h\|_H \leq \frac{1}{\alpha^*} \|F\|_{H'}$$

Además, existe $C > 0$ independiente de h tal que

$$\|u - u_h\|_H \leq C \operatorname{dist}(u, H_h), \qquad \textbf{(Estimación de Cea)}$$

donde

$$\operatorname{dist}(u, H_h) := \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H$$

Un problema de Dirichlet.

Teorema de Lax-Milgram (caso discreto) Suponga que

- Se cumplen las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram Generalizado.
- Existe $\alpha^* > 0$ independiente de h, tal que
  - ✓ Para todo $v_h \in H_h$: $\sup_{w_h \in H_h} \dfrac{A(v_h, w_h)}{\|w_h\|_H} \geq \alpha^* \|v_h\|_H$
  - ✓ Para todo $w_h \in H_h,\ w_h \neq 0:\quad \sup_{v_h \in H_h} A(v_h, w_h) > 0$

Entonces, para todo $F \in H'$ existe un único $u_h \in H_h$ tal que

$$A(u_h, v_h) = F(v_h)\ \forall v_h \in H_h, \quad \text{y} \quad \|u_h\|_H \leq \frac{1}{\alpha^*} \|F\|_{H'}$$

Además, existe $C > 0$ independiente de h tal que

$$\|u - u_h\|_H \leq C\, \mathrm{dist}(u, H_h), \qquad \textbf{(Estimación de Cea)}$$

donde

$$\mathrm{dist}(u, H_h) := \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H$$

Un problema de Dirichlet.

Teorema de Lax-Milgram (caso discreto) Suponga que

- Se cumplen las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram Generalizado.
- Existe $\alpha^* > 0$ independiente de h, tal que
  - ✓ Para todo $v_h \in H_h$: $\quad \sup_{w_h \in H_h} \dfrac{A(v_h, w_h)}{\|w_h\|_H} \geq \alpha^* \|v_h\|_H$
  - ✓ Para todo $w_h \in H_h,\ w_h \neq 0: \quad \sup_{v_h \in H_h} A(v_h, w_h) > 0$

Entonces, para todo $F \in H'$ existe un único $u_h \in H_h$ tal que

$$A(u_h, v_h) = F(v_h)\ \forall v_h \in H_h, \quad \text{y} \quad \|u_h\|_H \leq \frac{1}{\alpha^*} \|F\|_{H'}$$

Además, existe $C > 0$ independiente de h tal que

$$\|u - u_h\|_H \leq C\,\mathrm{dist}(u, H_h), \qquad \textbf{(Estimación de Cea)}$$

donde

$$\mathrm{dist}(u, H_h) := \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H$$

Un problema de Dirichlet.

Teorema de Lax-Milgram (caso discreto) Suponga que

- Se cumplen las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram Generalizado.
- Existe $\alpha^* > 0$ independiente de h, tal que
  - ✓ Para todo $v_h \in H_h$: $\quad \sup_{w_h \in H_h} \dfrac{A(v_h, w_h)}{\|w_h\|_H} \geq \alpha^* \|v_h\|_H$
  - ✓ Para todo $w_h \in H_h,\ w_h \neq 0 : \quad \sup_{v_h \in H_h} A(v_h, w_h) > 0$

Entonces, para todo $F \in H'$ existe un único $u_h \in H_h$ tal que

$$A(u_h, v_h) = F(v_h)\ \ \forall v_h \in H_h, \quad \text{y} \quad \|u_h\|_H \leq \frac{1}{\alpha^*} \|F\|_{H'}$$

Además, existe $C > 0$ independiente de h tal que

$$\|u - u_h\|_H \leq C \operatorname{dist}(u, H_h), \qquad \textbf{(Estimación de Cea)}$$

donde

$$\operatorname{dist}(u, H_h) := \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H$$

Un problema de Dirichlet.

Implementación del Método de Galerkin.

- Base de H_h: $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_N\}$.
- Matriz de rigidez: $\mathcal{A} := (a_{ij})_{N\times N}, \quad a_{ij} := A(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$.
- Vector de carga: $\mathcal{F} := (f_j)_{N\times 1}, \quad f_j := F(\boldsymbol{e}_j)$.
- Esquema de Galerkin: Hallar $\overrightarrow{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)^T$ tal que
$$\mathcal{A}\overrightarrow{\alpha} = \mathcal{F}.$$
- Solución de Galerkin: $u_h = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{e}_j$.
- Propiedades deseables de $\mathcal{A}$: Rala (banda), bien condicionada.
- Propiedades deseables de H_h: $\operatorname{dist}(u, H_h) \leq Ch^r$.

Un problema de Dirichlet.

Implementación del Método de Galerkin.

- Base de H_h: $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_N\}$.
- Matriz de rigidez: $\mathcal{A} := (a_{ij})_{N\times N}, \quad a_{ij} := A(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$.
- Vector de carga: $\mathcal{F} := (f_j)_{N\times 1}, \quad f_j := F(\boldsymbol{e}_j)$.
- Esquema de Galerkin: Hallar $\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)^T$ tal que
$$\mathcal{A}\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} = \mathcal{F}.$$
- Solución de Galerkin: $u_h = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{e}_j$.
- Propiedades deseables de $\mathcal{A}$: Rala (banda), bien condicionada.
- Propiedades deseables de H_h: $\mathrm{dist}(u, H_h) \leq Ch^r$.

Un problema de Dirichlet.

Implementación del Método de Galerkin.

- Base de H_h: $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_N\}$.
- Matriz de rigidez: $\mathcal{A} := (a_{ij})_{N\times N}, \quad a_{ij} := A(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$.
- Vector de carga: $\mathcal{F} := (f_j)_{N\times 1}, \quad f_j := F(\boldsymbol{e}_j)$.
- Esquema de Galerkin: Hallar $\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)^T$ tal que
$$\mathcal{A}\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} = \mathcal{F}.$$
- Solución de Galerkin: $u_h = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{e}_j$.
- Propiedades deseables de $\mathcal{A}$: Rala (banda), bien condicionada.
- Propiedades deseables de H_h: $\mathrm{dist}(u, H_h) \leq Ch^r$.

Un problema de Dirichlet.

Implementación del Método de Galerkin.

- Base de H_h: $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_N\}$.
- Matriz de rigidez: $\mathcal{A} := (a_{ij})_{N\times N}, \quad a_{ij} := A(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$.
- Vector de carga: $\mathcal{F} := (f_j)_{N\times 1}, \quad f_j := F(\boldsymbol{e}_j)$.
- Esquema de Galerkin: Hallar $\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)^T$ tal que
$$\mathcal{A}\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} = \mathcal{F}.$$
- Solución de Galerkin: $\quad u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \boldsymbol{e}_j$.
- Propiedades deseables de $\mathcal{A}$: Rala (banda), bien condicionada.
- Propiedades deseables de H_h: $\mathrm{dist}(u, H_h) \leq Ch^r$.

Un problema de Dirichlet.

Implementación del Método de Galerkin.

- Base de H_h: $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_N\}$.
- Matriz de rigidez: $\mathcal{A} := (a_{ij})_{N\times N}, \quad a_{ij} := A(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$.
- Vector de carga: $\mathcal{F} := (f_j)_{N\times 1}, \quad f_j := F(\boldsymbol{e}_j)$.
- Esquema de Galerkin: Hallar $\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ tal que
$$\mathcal{A}\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} = \mathcal{F}.$$
- Solución de Galerkin: $u_h = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{e}_j$.
- Propiedades deseables de $\mathcal{A}$: Rala (banda), bien condicionada.
- Propiedades deseables de H_h: $\mathrm{dist}(u, H_h) \leq Ch^r$.

Contenido

Espacio de elementos finitos.

Por simplicidad, asumimos que Ω es poligonal y que:

$$\boldsymbol{\kappa x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega$$

Formulación variacional: Hallar $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

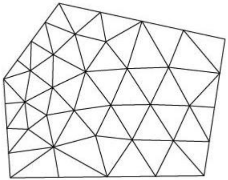
Esquema de Galerkin: Hallar $u_h \in H_h \subseteq \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

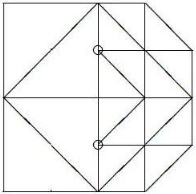
$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_\Omega f v_h \, dx \qquad \forall v_h \in H_h.$$

Espacio de elementos finitos.

Espacios de elementos finitos

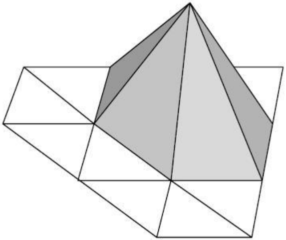
$\mathcal{T}_h$: Triangulación regular de Ω
$\Omega = \bigcup\{T : T \in \mathcal{T}_h\}$
$h = \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_h\}$
$v \in \mathbb{P}_1(T)$
$\Leftrightarrow v(x,y) = \alpha + \beta x + \gamma y \; \forall (x,y) \in T.$
$H_h :=$
$\left\{v_h \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \; \forall T \in \mathcal{T}_h\right\}$

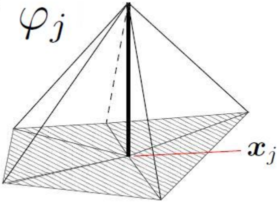




$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N\}$: Vertices interiores.
Base de H_h:
$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$:

$$\varphi_j|_\Gamma = 0, \quad \varphi_j(\boldsymbol{x}_j) = 1,$$
$$\varphi_j(\boldsymbol{x}_i) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

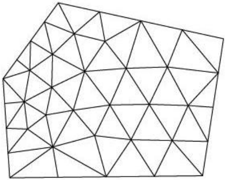


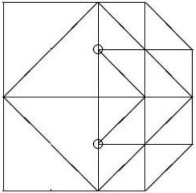


Espacio de elementos finitos.

Espacios de elementos finitos

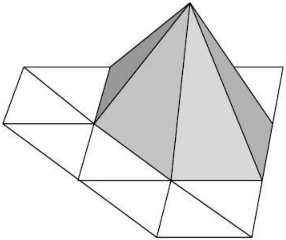
$\mathcal{T}_h$: Triangulación regular de Ω
$\Omega = \bigcup\{T : \ T \in \mathcal{T}_h\}$
$h = \text{máx}\,\{h_T : \ T \in \mathcal{T}_h\}$
$v \in \mathbb{P}_1(T)$
$\Leftrightarrow v(x,y) = \alpha + \beta x + \gamma y \; \forall (x,y) \in T.$
$H_h :=$
$\left\{v_h \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) : \ v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \; \forall T \in \mathcal{T}_h\right\}$

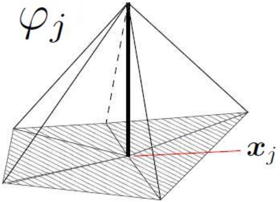




$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N\}$: Vertices interiores.
Base de H_h:
$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$:

$$\varphi_j|_\Gamma = 0, \quad \varphi_j(\ \boldsymbol{x}_j\ ) = 1,$$
$$\varphi_j(\boldsymbol{x}_i) = 0 \quad \forall i \neq j.$$





Espacio de elementos finitos.

Espacios de elementos finitos

$\mathcal{T}_h$: Triangulación regular de Ω

$\Omega = \bigcup\{T : T \in \mathcal{T}_h\}$

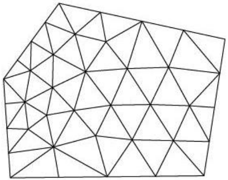
$h = \text{máx}\,\{h_T : T \in \mathcal{T}_h\}$

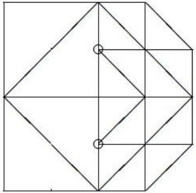
$v \in \mathbb{P}_1(T)$

$\Leftrightarrow v(x,y) = \alpha + \beta x + \gamma y \; \forall (x,y) \in T.$

$H_h :=$

$\left\{v_h \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) : \; v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \; \forall T \in \mathcal{T}_h\right\}$



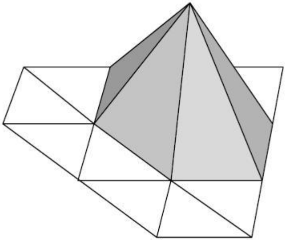


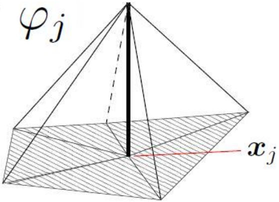
$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N\}$: Vertices interiores.

Base de H_h:

$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$:

$$\varphi_j|_\Gamma = 0, \quad \varphi_j(\,\boldsymbol{x}_j\,) = 1,$$
$$\varphi_j(\boldsymbol{x}_i) = 0 \quad \forall i \neq j.$$





Espacio de elementos finitos.

Es facil ver que

$$v(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} v(\boldsymbol{x}_j)\varphi_j(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \;\; \forall v \in H_h$$

La solución del esquema de Galerkin tiene la forma:

$$u_h(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} u_j\varphi_j(\boldsymbol{x}) \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \qquad (u_j = u_h(\boldsymbol{x}_j))$$

y así, el problema matricial asociado al esquema de Galerkin es:
Hallar $\boldsymbol{\mu} = (u_1, \ldots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N$ tal que $\mathcal{A}\boldsymbol{\mu} = \mathcal{F}$, donde

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{N\times N}, \quad a_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx \quad \text{(Matriz de Rigidez)}$$

$$\mathcal{F} = (f_j)_{N\times 1}, \quad f_j = \int_\Omega f\varphi_j \, dx \quad \text{(Vector de Carga)}$$

Espacio de elementos finitos.

Es facil ver que

$$v(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} v(\boldsymbol{x}_j)\varphi_j(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \ \forall v \in H_h$$

La solución del esquema de Galerkin tiene la forma:

$$u_h(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} u_j\varphi_j(\boldsymbol{x}) \ \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \qquad (u_j = u_h(\boldsymbol{x}_j))$$

y así, el problema matricial asociado al esquema de Galerkin es:
Hallar $\boldsymbol{\mu} = (u_1, \ldots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N$ tal que $\mathcal{A}\boldsymbol{\mu} = \mathcal{F}$, donde

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{N\times N}, \quad a_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx \quad \text{(Matriz de Rigidez)}$$

$$\mathcal{F} = (f_j)_{N\times 1}, \quad f_j = \int_\Omega f\varphi_j \, dx \quad \text{(Vector de Carga)}$$

Espacio de elementos finitos.

Es facil ver que

$$v(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} v(\boldsymbol{x}_j)\varphi_j(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \ \forall v \in H_h$$

La solución del esquema de Galerkin tiene la forma:

$$u_h(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} u_j\varphi_j(\boldsymbol{x}) \ \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \qquad (u_j = u_h(\boldsymbol{x}_j))$$

y así, el problema matricial asociado al esquema de Galerkin es:
Hallar $\boldsymbol{\mu} = (u_1, \ldots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N$ tal que $\mathcal{A}\boldsymbol{\mu} = \mathcal{F}$, donde

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{N\times N}, \quad a_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx \quad \text{(Matriz de Rigidez)}$$

$$\mathcal{F} = (f_j)_{N\times 1}, \quad f_j = \int_\Omega f\varphi_j \, dx \quad \text{(Vector de Carga)}$$

Espacio de elementos finitos.

Operador de Interpolación. Sean

$$C(\overline{\Omega}) := \left\{ v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \ v \text{ es continua} \right\}$$
$$C_\Gamma(\overline{\Omega}) := \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) : \ v = 0 \text{ en } \Gamma \right\}.$$

Si se define $\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$, dado por

$$\Pi_h v(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{N} v(\boldsymbol{x}_j)\varphi_j(\boldsymbol{x}) \quad \forall v \in C(\overline{\Omega}),\ \forall \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}.$$

- $\Pi_h(C_\Gamma(\overline{\Omega})) = H_h$, $\Pi_h v = v \ \ \forall v \in H_h$.
- $\Pi_h : C_\Gamma(\overline{\Omega}) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ es continuo.
- $\|\Pi v - v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C h^r \, |v|_{\mathrm{H}^{r+1}(\Omega)} \quad \forall v \in \mathrm{H}^{r+1}(\Omega),\ r > 0$

Espacio de elementos finitos.

Operador de Interpolación. Sean

$$C(\overline{\Omega}) := \left\{ v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \; v \text{ es continua} \right\}$$
$$C_\Gamma(\overline{\Omega}) := \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) : \; v = 0 \text{ en } \Gamma \right\}.$$

Si se define $\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$, dado por

$$\Pi_h v(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{N} v(\boldsymbol{x}_j)\varphi_j(\boldsymbol{x}) \quad \forall v \in C(\overline{\Omega}), \; \forall \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}.$$

- $\Pi_h(C_\Gamma(\overline{\Omega})) = H_h$, $\Pi_h v = v \;\; \forall v \in H_h$.
- $\Pi_h : C_\Gamma(\overline{\Omega}) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ es continuo.
- $\left\| \Pi v - v \right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C h^r \left| v \right|_{\mathrm{H}^{r+1}(\Omega)} \quad \forall v \in \mathrm{H}^{r+1}(\Omega), \; r > 0$

Espacio de elementos finitos.

Operador de Interpolación. Sean

$$C(\overline{\Omega}) := \left\{v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \ v \text{ es continua}\right\}$$
$$C_\Gamma(\overline{\Omega}) := \left\{v \in C(\overline{\Omega}) : \ v = 0 \text{ en } \Gamma\right\}.$$

Si se define $\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$, dado por

$$\Pi_h v(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{N} v(\boldsymbol{x}_j)\varphi_j(\boldsymbol{x}) \quad \forall v \in C(\overline{\Omega}),\ \forall \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}.$$

- $\Pi_h(C_\Gamma(\overline{\Omega})) = H_h$, $\Pi_h v = v \ \ \forall v \in H_h$.
- $\Pi_h : C_\Gamma(\overline{\Omega}) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ es continuo.
- $\|\Pi v - v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C h^r \, |v|_{\mathrm{H}^{r+1}(\Omega)} \qquad \forall v \in \mathrm{H}^{r+1}(\Omega),\ r > 0$

Espacio de elementos finitos.

Operador de Interpolación. Sean

$$C(\overline{\Omega}) := \left\{ v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \; v \text{ es continua} \right\}$$
$$C_\Gamma(\overline{\Omega}) := \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) : \; v = 0 \text{ en } \Gamma \right\}.$$

Si se define $\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$, dado por

$$\Pi_h v(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{N} v(\boldsymbol{x}_j)\varphi_j(\boldsymbol{x}) \quad \forall v \in C(\overline{\Omega}), \; \forall \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}.$$

- $\Pi_h(C_\Gamma(\overline{\Omega})) = H_h$, $\Pi_h v = v \;\; \forall v \in H_h$.
- $\Pi_h : C_\Gamma(\overline{\Omega}) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ es continuo.
- $\left\| \Pi v - v \right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \le C h^r \left| v \right|_{\mathrm{H}^{r+1}(\Omega)} \quad \forall v \in \mathrm{H}^{r+1}(\Omega), \; r > 0$

Espacio de elementos finitos.

Operador de Interpolación. Sean

$$C(\overline{\Omega}) := \left\{ v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \ v \text{ es continua} \right\}$$
$$C_\Gamma(\overline{\Omega}) := \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) : \ v = 0 \text{ en } \Gamma \right\}.$$

Si se define $\Pi_h : C(\overline{\Omega}) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$, dado por

$$\Pi_h v(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{N} v(\boldsymbol{x}_j)\varphi_j(\boldsymbol{x}) \quad \forall v \in C(\overline{\Omega}), \ \forall \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}.$$

- $\Pi_h(C_\Gamma(\overline{\Omega})) = H_h$, $\Pi_h v = v \ \ \forall v \in H_h$.
- $\Pi_h : C_\Gamma(\overline{\Omega}) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ es continuo.
- $\|\Pi v - v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C h^r \, |v|_{\mathrm{H}^{r+1}(\Omega)} \quad \forall v \in \mathrm{H}^{r+1}(\Omega), \ r > 0$

Espacio de elementos finitos.

Propiedades de H_h

- **Convergencia:** $\operatorname{dist}(v, H_h) \leq C h^r \, |v|_{\mathrm{H}^{r+1}(\Omega)} \quad \forall v \in \mathrm{H}^{r+1}(\Omega)$.
- **Propiedad inversa:** $A(v_h, v_h) \leq C h^{-2} \, \|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \quad \forall v_h \in H_h$.

Lema. Sean $\overrightarrow{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ y $v_h := \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j$.

$$c h^2 \leq \frac{\|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\|\overrightarrow{\alpha}\|^2_{\mathbb{R}^2}} \leq C h^2$$

Lema. $\operatorname{cond}(\mathcal{A}) \leq C h^{-2}$

Dem. $\dfrac{\overrightarrow{\alpha}^T \mathcal{A} \overrightarrow{\alpha}}{\|\overrightarrow{\alpha}\|_{\mathbb{R}^N}} = \dfrac{A(v_h, v_h)}{\|\overrightarrow{\alpha}\|_{\mathbb{R}^N}} \leq C h^{-2} \dfrac{\|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\|\overrightarrow{\alpha}\|_{\mathbb{R}^N}} \leq C \Longrightarrow \lambda_{\text{máx}} \leq C.$

$$\frac{\overrightarrow{\alpha}^T \mathcal{A} \overrightarrow{\alpha}}{\|\overrightarrow{\alpha}\|_{\mathbb{R}^N}} = \frac{A(v_h, v_h)}{\|\overrightarrow{\alpha}\|_{\mathbb{R}^N}} \geq \alpha \frac{\|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\|\overrightarrow{\alpha}\|_{\mathbb{R}^N}} \geq C h^2 \Longrightarrow \lambda_{\text{mín}} \leq C h^2.$$

Espacio de elementos finitos.

Propiedades de H_h

- Convergencia: $\operatorname{dist}(v, H_h) \le C h^r \left| v \right|_{\mathrm{H}^{r+1}(\Omega)} \quad \forall v \in \mathrm{H}^{r+1}(\Omega).$
- Propiedad inversa: $A(v_h, v_h) \le C h^{-2} \left\| v_h \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \quad \forall v_h \in H_h.$

Lema. Sean $\overrightarrow{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ y $v_h := \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j$.

$$c h^2 \le \frac{\left\| v_h \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\left\| \overrightarrow{\alpha} \right\|^2_{\mathbb{R}^2}} \le C h^2$$

Lema. $\operatorname{cond}(\mathcal{A}) \le C h^{-2}$

Dem. $\dfrac{\overrightarrow{\alpha}^T \mathcal{A} \overrightarrow{\alpha}}{\left\| \overrightarrow{\alpha} \right\|_{\mathbb{R}^N}} = \dfrac{A(v_h, v_h)}{\left\| \overrightarrow{\alpha} \right\|_{\mathbb{R}^N}} \le C h^{-2} \dfrac{\left\| v_h \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\left\| \overrightarrow{\alpha} \right\|_{\mathbb{R}^N}} \le C \Longrightarrow \lambda_{\text{máx}} \le C.$

$$\frac{\overrightarrow{\alpha}^T \mathcal{A} \overrightarrow{\alpha}}{\left\| \overrightarrow{\alpha} \right\|_{\mathbb{R}^N}} = \frac{A(v_h, v_h)}{\left\| \overrightarrow{\alpha} \right\|_{\mathbb{R}^N}} \ge \alpha \frac{\left\| v_h \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\left\| \overrightarrow{\alpha} \right\|_{\mathbb{R}^N}} \ge C h^2 \Longrightarrow \lambda_{\text{mín}} \ge C h^2.$$

Espacio de elementos finitos.

Propiedades de H_h

- Convergencia: $\operatorname{dist}(v, H_h) \leq Ch^r \, |v|_{\mathrm{H}^{r+1}(\Omega)} \quad \forall v \in \mathrm{H}^{r+1}(\Omega)$.
- Propiedad inversa: $A(v_h, v_h) \leq Ch^{-2} \, \|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \quad \forall v_h \in H_h$.

Lema. Sean $\vec{\boldsymbol{\alpha}} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ y $v_h := \sum_{j=1}^N \alpha_j \boldsymbol{e}_j$.

$$ch^2 \leq \frac{\|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|^2_{\mathbb{R}^2}} \leq Ch^2$$

Lema. $\operatorname{cond}(\mathcal{A}) \leq Ch^{-2}$

Dem. $\dfrac{\vec{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathcal{A} \vec{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} = \dfrac{A(v_h, v_h)}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} \leq Ch^{-2} \dfrac{\|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} \leq C \Longrightarrow \lambda_{\text{máx}} \leq C.$

$$\frac{\vec{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathcal{A} \vec{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} = \frac{A(v_h, v_h)}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} \geq \alpha \frac{\|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} \geq Ch^2 \Longrightarrow \lambda_{\text{mín}} \geq Ch^2.$$

Espacio de elementos finitos.

Propiedades de H_h

- Convergencia: $\operatorname{dist}(v, H_h) \leq C h^r \, |v|_{\mathrm{H}^{r+1}(\Omega)} \quad \forall v \in \mathrm{H}^{r+1}(\Omega)$.
- Propiedad inversa: $A(v_h, v_h) \leq C h^{-2} \, \|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \quad \forall v_h \in H_h$.

Lema. Sean $\vec{\boldsymbol{\alpha}} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ y $v_h := \sum_{j=1}^N \alpha_j \boldsymbol{e}_j$.

$$ch^2 \leq \frac{\|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|^2_{\mathbb{R}^2}} \leq Ch^2$$

Lema. $\operatorname{cond}(\mathcal{A}) \leq C h^{-2}$

Dem. $\dfrac{\vec{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathcal{A} \vec{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} = \dfrac{A(v_h, v_h)}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} \leq C h^{-2} \dfrac{\|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} \leq C \Longrightarrow \lambda_{\text{máx}} \leq C$.

$$\frac{\vec{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathcal{A} \vec{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} = \frac{A(v_h, v_h)}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} \geq \alpha \frac{\|v_h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|_{\mathbb{R}^N}} \geq Ch^2 \Longrightarrow \lambda_{\text{mín}} \geq Ch^2.$$

Contenido

El problema de Stokes

- El problema de valores de Contorno
  Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Hallar $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = g & \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

- Restricción sobre g: $\int_\Omega g = \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = 0$.
- I.P.P. primera ecuación. Para todo $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2$:

$$-\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{2} -\int_\Omega v_i \Delta u_i = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}$$

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{v} = -\int_\Omega p \operatorname{div}(\boldsymbol{v})$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} - \int_\Omega p \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2.$$

El problema de Stokes

- El problema de valores de Contorno
  Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Hallar $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} && \text{en } \Omega, \\ \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) &= g && \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u} &= \mathbf{0} && \text{en } \Gamma. \end{aligned} \right.$$

- Restricción sobre g: $\int_\Omega g = \int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = 0$.
- I.P.P. primera ecuación. Para todo $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2$:

$$-\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{2} -\int_\Omega v_i \Delta u_i = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}$$

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{v} = -\int_\Omega p \, \mathrm{div}(\boldsymbol{v})$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} - \int_\Omega p \, \mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2.$$

El problema de Stokes

- El problema de valores de Contorno
  Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Hallar $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} && \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) &= g && \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u} &= \mathbf{0} && \text{en } \Gamma. \end{aligned} \right.$$

- Restricción sobre g: $\int_\Omega g = \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = 0$.
- I.P.P. primera ecuación. Para todo $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2$:

$$-\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{2} -\int_\Omega v_i \Delta u_i = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}$$

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{v} = -\int_\Omega p \operatorname{div}(\boldsymbol{v})$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} - \int_\Omega p \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2.$$

El problema de Stokes

- El problema de valores de Contorno
  Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Hallar $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} && \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) &= g && \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0} && \text{en } \Gamma. \end{aligned} \right.$$

- Restricción sobre g: $\int_\Omega g = \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = 0$.
- I.P.P. primera ecuación. Para todo $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2$:

$$-\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{2} -\int_\Omega v_i \Delta u_i = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}$$

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{v} = -\int_\Omega p \operatorname{div}(\boldsymbol{v})$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} - \int_\Omega p \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2.$$

El problema de Stokes

- El problema de valores de Contorno
  Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Hallar $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} && \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) &= g && \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0} && \text{en } \Gamma. \end{aligned} \right.$$

- Restricción sobre g: $\int_\Omega g = \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = 0$.
- I.P.P. primera ecuación. Para todo $\boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2$:

$$-\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{2} -\int_\Omega v_i \Delta u_i = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}$$

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{v} = -\int_\Omega p \operatorname{div}(\boldsymbol{v})$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} - \int_\Omega p \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2.$$

El problema de Stokes

- Segunda ecuación:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = g \ \text{ en } \Omega \Longrightarrow \int_\Omega q \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega g q \quad \forall q \in \mathrm{L}^2_0(\Omega),$$

$$\mathrm{L}^2_0(\Omega) := \left\{ q \in \mathrm{L}^2(\Omega) : \ \int_\Omega q = 0. \right\}$$

- Formulación variacional. Hallar $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)^2$, $p \in \mathrm{L}^2_0(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} - \int_\Omega p \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)^2$$

$$-\int_\Omega q \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = -\int_\Omega g q \quad \forall q \in \mathrm{L}^2_0(\Omega)$$

El problema de Stokes

- Segunda ecuación:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = g \ \text{ en } \Omega \Longrightarrow \int_\Omega q \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega g q \quad \forall q \in \mathrm{L}^2_0(\Omega),$$

$$\mathrm{L}^2_0(\Omega) := \left\{ q \in \mathrm{L}^2(\Omega) : \ \int_\Omega q = 0. \right\}$$

- Formulación variacional. Hallar $\boldsymbol{u} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)^2$, $p \in \mathrm{L}^2_0(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} - \int_\Omega p \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)^2 \\ - \int_\Omega q \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) &= - \int_\Omega g q \quad \forall q \in \mathrm{L}^2_0(\Omega) \end{aligned}$$

El problema de Stokes

- Formulación variacional mixta:

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}, \quad b(\boldsymbol{v},p) := -\int_\Omega p\,\mathrm{div}(\boldsymbol{v}),$$
$$F(\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}, \quad G(q) = -\int_\Omega gq$$

Hallar $\boldsymbol{u} \in H := \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2$ y $p \in Q := \mathrm{L}_0^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},p) &= F(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in H \\ b(\boldsymbol{u},q) &= G(q) \qquad \forall q \in Q. \end{aligned}$$

- Existencia y Unicidad de solución:

Teoría de Babuska-Brezzi.

El problema de Stokes

- Formulación variacional mixta:

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{v}, \quad b(\boldsymbol{v},p) := -\int_\Omega p\,\mathrm{div}(\boldsymbol{v}),$$
$$F(\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}, \quad G(q) = -\int_\Omega gq$$

Hallar $\boldsymbol{u} \in H := \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2$ y $p \in Q := \mathrm{L}_0^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},p) &= F(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in H \\ b(\boldsymbol{u},q) &= G(q) \qquad \forall q \in Q. \end{aligned}$$

- Existencia y Unicidad de solución:

Teoría de Babuska-Brezzi.

Contenido

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión continua). Sean H y Q espacios de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas y $V := \{v \in H : \; b(v,\mu) = 0 \,\forall \mu \in Q\}$.

Suponga que:

- a es V-elíptica: $a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2$
- b satisface la condición de Babuska-Brezzi:

$$\sup_{v \in H,\, v \neq 0} \frac{b(v,\mu)}{\|v\|_H} \geq \|\mu\|_Q \qquad \forall \mu \in Q.$$

Entonces, para todo $(F,G) \in H' \times Q'$ existe un único $(u,\lambda) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= F(v) \qquad && \forall v \in H \\ b(u,\mu) &= G(\mu) \qquad && \forall \mu \in Q \end{aligned}$$

Además, existe $C > 0$ independiente de (u,λ) tal que

$$\|(u,\lambda)\| \leq C \left\{ \|F\|_{H'} + \|G\|_{Q'} \right\}.$$

Teoría de Babuska-Brezzi

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión continua). Sean H y Q espacios de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas y $V := \{v \in H : \ b(v, \mu) = 0 \, \forall \mu \in Q\}$. Suponga que:

- a es V-elíptica: $a(v, v) \geq \alpha \, \|v\|_H^2$
- b satisface la condición de Babuska-Brezzi:

$$\sup_{v \in H, \, v \neq 0} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_H} \geq \|\mu\|_Q \qquad \forall \mu \in Q.$$

Entonces, para todo $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único $(u, \lambda) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \qquad \forall v \in H \\ b(u, \mu) &= G(\mu) \qquad \forall \mu \in Q \end{aligned}$$

Además, existe $C > 0$ independiente de (u, λ) tal que

$$\|(u, \lambda)\| \leq C \left\{ \|F\|_{H'} + \|G\|_{Q'} \right\}.$$

Teoría de Babuska-Brezzi

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión continua). Sean H y Q espacios de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas y $V := \{v \in H : \ b(v, \mu) = 0 \, \forall \mu \in Q\}$. Suponga que:

- a es V-elíptica: $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2$
- b satisface la condición de Babuska-Brezzi:

$$\sup_{v \in H, \, v \neq 0} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_H} \geq \|\mu\|_Q \qquad \forall \mu \in Q.$$

Entonces, para todo $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único $(u, \lambda) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \qquad \forall v \in H \\ b(u, \mu) &= G(\mu) \qquad \forall \mu \in Q \end{aligned}$$

Además, existe $C > 0$ independiente de (u, λ) tal que

$$\|(u, \lambda)\| \leq C \left\{ \|F\|_{H'} + \|G\|_{Q'} \right\}.$$

Teoría de Babuska-Brezzi

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión continua). Sean H y Q espacios de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas y $V := \{v \in H : \; b(v, \mu) = 0 \; \forall \mu \in Q\}$.
Suponga que:

- a es V-elíptica: $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2$
- b satisface la condición de Babuska-Brezzi:

$$\sup_{v \in H,\, v \neq 0} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_H} \geq \|\mu\|_Q \qquad \forall \mu \in Q.$$

Entonces, para todo $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único $(u, \lambda) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \qquad \forall v \in H \\ b(u, \mu) &= G(\mu) \qquad \forall \mu \in Q \end{aligned}$$

Además, existe $C > 0$ independiente de (u, λ) tal que

$$\|(u, \lambda)\| \leq C \left\{ \|F\|_{H'} + \|G\|_{Q'} \right\}.$$

Teoría de Babuska-Brezzi

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión continua). Sean H y Q espacios de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas y $V := \{v \in H : \; b(v, \mu) = 0 \; \forall \mu \in Q\}$. Suponga que:

- a es V-elíptica: $a(v, v) \geq \alpha \, \|v\|_H^2$
- b satisface la condición de Babuska-Brezzi:

$$\sup_{v \in H,\, v \neq 0} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_H} \geq \|\mu\|_Q \qquad \forall \mu \in Q.$$

Entonces, para todo $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único $(u, \lambda) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= F(v) \qquad \forall v \in H \\ b(u, \mu) &= G(\mu) \qquad \forall \mu \in Q \end{aligned}$$

Además, existe $C > 0$ independiente de (u, λ) tal que

$$\|(u, \lambda)\| \leq C \left\{ \|F\|_{H'} + \|G\|_{Q'} \right\}.$$

Contenido

Esquema de Galerkin.

- Método de Galerkin
  $\{H_h \times Q_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de $H \times Q$ tal que
  a) $H_h \subseteq H_{\tilde{h}}$, $Q_h \subseteq Q_{\tilde{h}}$ para todo $h \geq \tilde{h}$,
  b) $\bigcup\{H_h : h > 0\}$ es denso en H,
  $\bigcup\{Q_h : h > 0\}$ es denso en Q.
- Esquema de Galerkin: Hallar $(u_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) + b(v_h, p) &= F(v_h) \qquad \forall v_h \in H_h \\ b(u_h, q_h) &= G(q_h) \qquad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

- Existencia y unicidad: Existe un único (u_h, p_h) solución del esquema de Galerkin?
- Convergencia:

$$\|(u,p) - (u_h, p_h)\|_{H\times Q} \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0?$$

Esquema de Galerkin.

- **Método de Galerkin**
  $\{H_h \times Q_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de $H \times Q$ tal que
  - **a)** $H_h \subseteq H_{\tilde{h}}$, $Q_h \subseteq Q_{\tilde{h}}$ para todo $h \geq \tilde{h}$,
  - **b)** $\bigcup\{H_h : h > 0\}$ es denso en H,
    $\bigcup\{Q_h : h > 0\}$ es denso en Q.
- **Esquema de Galerkin:** Hallar $(u_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) + b(v_h, p) &= F(v_h) \qquad \forall v_h \in H_h \\ b(u_h, q_h) &= G(q_h) \qquad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

- **Existencia y unicidad:** Existe un único (u_h, p_h) solución del esquema de Galerkin?
- **Convergencia:**

$$\|(u, p) - (u_h, p_h)\|_{H\times Q} \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0?$$

Esquema de Galerkin.

- **Método de Galerkin**
  $\{H_h \times Q_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de $H \times Q$ tal que
  - **a)** $H_h \subseteq H_{\tilde{h}}$, $Q_h \subseteq Q_{\tilde{h}}$ para todo $h \geq \tilde{h}$,
  - **b)** $\bigcup\{H_h : h > 0\}$ es denso en H,
    $\bigcup\{Q_h : h > 0\}$ es denso en Q.
- **Esquema de Galerkin:** Hallar $(u_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$
\begin{aligned}
a(u_h, v_h) + b(v_h, p) &= F(v_h) \qquad \forall v_h \in H_h \\
b(u_h, q_h) &= G(q_h) \qquad \forall q_h \in Q_h.
\end{aligned}
$$

- **Existencia y unicidad:** Existe un único (u_h, p_h) solución del esquema de Galerkin?
- **Convergencia:**

$$
\|(u,p) - (u_h, p_h)\|_{H \times Q} \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0?
$$

Esquema de Galerkin.

- Método de Galerkin
  $\{H_h \times Q_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de $H \times Q$ tal que
  a) $H_h \subseteq H_{\tilde{h}}$, $Q_h \subseteq Q_{\tilde{h}}$ para todo $h \geq \tilde{h}$,
  b) $\bigcup\{H_h : h > 0\}$ es denso en H,
  $\bigcup\{Q_h : h > 0\}$ es denso en Q.
- Esquema de Galerkin: Hallar $(u_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) + b(v_h, p) &= F(v_h) \qquad && \forall v_h \in H_h \\ b(u_h, q_h) &= G(q_h) \qquad && \forall q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

- Existencia y unicidad: Existe un único (u_h, p_h) solución del esquema de Galerkin?
- Convergencia:

$$\|(u,p) - (u_h, p_h)\|_{H\times Q} \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0?$$

Teoria de Babuska-Brezzi

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión discreta). Sea $\{H_h \times Q_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de $H \times Q$ y defina $V_h := \{v_h \in H_h : \; b(v_h, \mu_h) = 0 \, \forall \mu_h \in Q_h\}$. Suponga que

- Se verifican las hipótesis del TBB (versión continua)
- a es V_h-elíptica: Existe α^* independiente de h, tal que $a(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|_H^2 \quad \forall v_h \in V_h$
- b satisface la condición BB discreta: Existe $\beta^* > 0$ independiente de h, tal que

$$\sup_{v_h \in H_h,\, v_h \neq 0} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|_H} \geq \|\mu_h\|_Q \qquad \forall \mu_h \in Q_h.$$

Entonces, para todo $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único (u_h, λ_h) solución del esquema de Galerkin asociado. Además, existe $C > 0$ independiente de h, tal que

$$\|(u, \lambda) - (u_h, \lambda_h)\|_{H \times Q} \leq C \operatorname{dist}\left((u, \lambda), H_h \times Q_h\right)$$

Teoria de Babuska-Brezzi

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión discreta). Sea $\{H_h \times Q_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de $H \times Q$ y defina $V_h := \{v_h \in H_h : \, b(v_h, \mu_h) = 0 \,\forall \mu_h \in Q_h\}$. Suponga que

- Se verifican las hipótesis del TBB (versión continua)
- a es V_h-elíptica: Existe α^* independiente de h, tal que $a(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|_H^2 \quad \forall v_h \in V_h$
- b satisface la condición BB discreta: Existe $\beta^* > 0$ independiente de h, tal que

$$\sup_{v_h \in H_h,\, v_h \neq 0} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|_H} \geq \|\mu_h\|_Q \qquad \forall \mu_h \in Q_h.$$

Entonces, para todo $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único (u_h, λ_h) solución del esquema de Galerkin asociado. Además, existe $C > 0$ independiente de h, tal que

$$\|(u, \lambda) - (u_h, \lambda_h)\|_{H \times Q} \leq C \operatorname{dist}\left((u, \lambda), H_h \times Q_h\right)$$

Teoria de Babuska-Brezzi

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión discreta). Sea $\{H_h \times Q_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de $H \times Q$ y defina $V_h := \{v_h \in H_h : \, b(v_h, \mu_h) = 0 \, \forall \mu_h \in Q_h\}$.Suponga que

- Se verifican las hipótesis del TBB (versión continua)
- a es V_h-elíptica: Existe α^* independiente de h, tal que $a(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|_H^2 \quad \forall v_h \in V_h$
- b satisface la condición BB discreta: Existe $\beta^* > 0$ independiente de h, tal que

$$\sup_{v_h \in H_h, v_h \neq 0} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|_H} \geq \|\mu_h\|_Q \qquad \forall \mu_h \in Q_h.$$

Entonces, para todo $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único (u_h, λ_h) solución del esquema de Galerkin asociado. Además, existe $C > 0$ independiente de h, tal que

$$\|(u, \lambda) - (u_h, \lambda_h)\|_{H \times Q} \leq C \operatorname{dist}((u, \lambda), H_h \times Q_h)$$

Teoria de Babuska-Brezzi

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión discreta). Sea $\{H_h \times Q_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de $H \times Q$ y defina $V_h := \{v_h \in H_h : \; b(v_h, \mu_h) = 0 \, \forall \mu_h \in Q_h\}$.Suponga que

- Se verifican las hipótesis del TBB (versión continua)
- a es V_h-elíptica: Existe α^* independiente de h, tal que $a(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|_H^2 \quad \forall v_h \in V_h$
- b satisface la condición BB discreta: Existe $\beta^* > 0$ independiente de h, tal que
$$\sup_{v_h \in H_h,\, v_h \neq 0} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|_H} \geq \|\mu_h\|_Q \qquad \forall \mu_h \in Q_h.$$

Entonces, para todo $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único (u_h, λ_h) solución del esquema de Galerkin asociado. Además, existe $C > 0$ independiente de h, tal que

$$\|(u, \lambda) - (u_h, \lambda_h)\|_{H \times Q} \leq C \operatorname{dist}\left((u, \lambda), H_h \times Q_h\right)$$

Teoria de Babuska-Brezzi

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión discreta). Sea $\{H_h \times Q_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de $H \times Q$ y defina $V_h := \{v_h \in H_h : \; b(v_h, \mu_h) = 0 \, \forall \mu_h \in Q_h\}$.Suponga que

- Se verifican las hipótesis del TBB (versión continua)
- a es V_h-elíptica: Existe α^* independiente de h, tal que $a(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|_H^2 \quad \forall v_h \in V_h$
- b satisface la condición BB discreta: Existe $\beta^* > 0$ independiente de h, tal que $\sup_{v_h \in H_h,\, v_h \neq 0} \dfrac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|_H} \geq \|\mu_h\|_Q \qquad \forall \mu_h \in Q_h.$

Entonces, para todo $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único (u_h, λ_h) solución del esquema de Galerkin asociado. Además, existe $C > 0$ independiente de h, tal que

$$\|(u, \lambda) - (u_h, \lambda_h)\|_{H \times Q} \leq C \, \mathrm{dist}\left((u, \lambda), H_h \times Q_h\right)$$

Teoria de Babuska-Brezzi

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión discreta). Sea $\{H_h \times Q_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de $H \times Q$ y defina $V_h := \{v_h \in H_h : \ b(v_h, \mu_h) = 0 \, \forall \mu_h \in Q_h\}$.Suponga que

- Se verifican las hipótesis del TBB (versión continua)
- a es V_h-elíptica: Existe α^* independiente de h, tal que $a(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|_H^2 \quad \forall v_h \in V_h$
- b satisface la condición BB discreta: Existe $\beta^* > 0$ independiente de h, tal que
$$\sup_{v_h \in H_h,\, v_h \neq 0} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|_H} \geq \|\mu_h\|_Q \qquad \forall \mu_h \in Q_h.$$

Entonces, para todo $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único (u_h, λ_h) solución del esquema de Galerkin asociado. Además, existe $C > 0$ independiente de h, tal que

$$\|(u, \lambda) - (u_h, \lambda_h)\|_{H \times Q} \leq C \operatorname{dist}((u, \lambda), H_h \times Q_h)$$

Teoria de Babuska-Brezzi

Teorema de Babuska-Brezzi (Versión discreta). Sea $\{H_h \times Q_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de $H \times Q$ y defina $V_h := \{v_h \in H_h : \ b(v_h, \mu_h) = 0 \, \forall \mu_h \in Q_h\}$.Suponga que

- Se verifican las hipótesis del TBB (versión continua)
- a es V_h-elíptica: Existe α^* independiente de h, tal que $a(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|_H^2 \quad \forall v_h \in V_h$
- b satisface la condición BB discreta: Existe $\beta^* > 0$ independiente de h, tal que $\sup_{v_h \in H_h, v_h \neq 0} \dfrac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|_H} \geq \|\mu_h\|_Q \qquad \forall \mu_h \in Q_h.$

Entonces, para todo $(F, G) \in H' \times Q'$ existe un único (u_h, λ_h) solución del esquema de Galerkin asociado. Además, existe $C > 0$ independiente de h, tal que

$$\|(u, \lambda) - (u_h, \lambda_h)\|_{H \times Q} \leq C \operatorname{dist}\left((u, \lambda), H_h \times Q_h\right)$$

Teoría de babuska-Brezzi

- La condición BB discreta es una condición de compatiblidad entre los espacios H_h y Q_h.
- En el caso del problema de Stokes, espacios de elementos finitos, como $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$, no satisfacen la condición BB discreta.
- Mini-elementos. Para cada $T \in \mathcal{T}_h$, sea $b_T : T \to \mathbb{R}$ una función continua, lineal a trozos y tal que
  - $b_T(\hat{C}) = 1$, $\hat{C}$: baricentro de T.
  - b_T se anula en los vertices de T.

  Sean $\hat{P}_1(T) := [\mathbb{P}_1 \oplus \mathrm{gen}(b_T)]^2$ y

$$H_h := \left\{ v_h \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2 : \; v_h|_T \in \hat{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$Q_h := \left\{ q_h \in \mathrm{L}_0^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) : \; q_h|_T \in \mathbb{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Teoría de babuska-Brezzi

- La condición BB discreta es una condición de compatiblidad entre los espacios H_h y Q_h.
- En el caso del problema de Stokes, espacios de elementos finitos, como $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$, no satisfacen la condición BB discreta.
- Mini-elementos. Para cada $T \in \mathcal{T}_h$, sea $b_T : T \to \mathbb{R}$ una función continua, lineal a trozos y tal que
  - $b_T(\hat{C}) = 1$, $\hat{C}$: baricentro de T.
  - b_T se anula en los vertices de T.

  Sean $\hat{P}_1(T) := [\mathbb{P}_1 \oplus \mathrm{gen}(b_T)]^2$ y

$$H_h := \left\{ v_h \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2 : \, v_h|_T \in \hat{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$Q_h := \left\{ q_h \in \mathrm{L}_0^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) : \, q_h|_T \in \mathbb{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Teoría de babuska-Brezzi

- La condición BB discreta es una condición de compatiblidad entre los espacios H_h y Q_h.
- En el caso del problema de Stokes, espacios de elementos finitos, como $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$, no satisfacen la condición BB discreta.
- Mini-elementos. Para cada $T \in \mathcal{T}_h$, sea $b_T : T \to \mathbb{R}$ una función continua, lineal a trozos y tal que
  - $b_T(\hat{C}) = 1$, $\hat{C}$: baricentro de T.
  - b_T se anula en los vertices de T.

  Sean $\hat{P}_1(T) := [\mathbb{P}_1 \oplus \mathrm{gen}(b_T)]^2$ y

$$H_h := \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2 : \ \boldsymbol{v}_h|_T \in \hat{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$Q_h := \left\{ q_h \in \mathrm{L}_0^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) : \ q_h|_T \in \mathbb{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Teoría de babuska-Brezzi

- La condición BB discreta es una condición de compatiblidad entre los espacios H_h y Q_h.
- En el caso del problema de Stokes, espacios de elementos finitos, como $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$, no satisfacen la condición BB discreta.
- Mini-elementos. Para cada $T \in \mathcal{T}_h$, sea $b_T : T \to \mathbb{R}$ una función continua, lineal a trozos y tal que
  - $b_T(\hat{C}) = 1$, $\hat{C}$: baricentro de T.
  - b_T se anula en los vertices de T.

  Sean $\hat{P}_1(T) := [\mathbb{P}_1 \oplus \mathrm{gen}(b_T)]^2$ y

$$H_h := \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2 : \ \boldsymbol{v}_h|_T \in \hat{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$Q_h := \left\{ q_h \in \mathrm{L}_0^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) : \ q_h|_T \in \mathbb{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Teoría de babuska-Brezzi

- La condición BB discreta es una condición de compatiblidad entre los espacios H_h y Q_h.
- En el caso del problema de Stokes, espacios de elementos finitos, como $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$, no satisfacen la condición BB discreta.
- Mini-elementos. Para cada $T \in \mathcal{T}_h$, sea $b_T : T \to \mathbb{R}$ una función continua, lineal a trozos y tal que
  - $b_T(\hat{C}) = 1$, $\hat{C}$: baricentro de T.
  - b_T se anula en los vertices de T.

  Sean $\hat{P}_1(T) := [\mathbb{P}_1 \oplus \mathrm{gen}(b_T)]^2$ y

$$H_h := \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)^2 : \ \boldsymbol{v}_h|_T \in \hat{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$Q_h := \left\{ q_h \in \mathrm{L}_0^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) : \ q_h|_T \in \mathbb{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Contenido

Lema de Fortin.

Lema de Fortin. Sean H y Q espacios de Hilbert. Sea $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Supongamos que b cumple la condición BB continua. Sean H_h y Q_h espacios de dimensión finita de H y Q respectivamente.

$b : H_h \times Q_h$ cumple la condición BB discreta si y solo si existe $\gamma > 0$ independiente de h, tal que para todo $v \in H$ existe $\Pi_h(v) \in H_h$ tal que

$$b(v, q_h) = b(\Pi_h(v), q_h)\ \ \forall q_h \in Q_h, \quad \text{y} \quad \|\Pi_h(v)\| \leq \gamma \|v\|_H .$$

Teorema. Sean H_h y Q_h los subespacios de elementos finitos de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)^2$ y $\mathrm{L}_0^2(\Omega)$ definidos en la diapositiva anterior (mini-elementos). La forma bilineal $b : H_h \times Q_h \to \mathbb{R}$ del problema de Stokes satisface la condición BB discreta.Además, si $\boldsymbol{u} \in [\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)]^2$ y $p \in \mathrm{L}_0^2(\Omega) \cap \mathrm{H}^1(\Omega)$, entonces

$$\mathrm{dist}((\boldsymbol{u}, p), (H_h, Q_h)) \leq Ch$$

Lema de Fortin.

Lema de Fortin. Sean H y Q espacios de Hilbert. Sea $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Supongamos que b cumple la condición BB continua. Sean H_h y Q_h espacios de dimensión finita de H y Q respectivamente.
$b : H_h \times Q_h$ cumple la condición BB discreta si y solo si existe $\gamma > 0$ independiente de h, tal que para todo $v \in H$ existe $\Pi_h(v) \in H_h$ tal que

$$b(v, q_h) = b(\Pi_h(v), q_h) \;\; \forall q_h \in Q_h, \quad \text{y} \quad \|\Pi_h(v)\| \leq \gamma \, \|v\|_H .$$

Teorema. Sean H_h y Q_h los subespacios de elementos finitos de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)^2$ y $\mathrm{L}_0^2(\Omega)$ definidos en la diapositiva anterior (mini-elementos). La forma bilineal $b : H_h \times Q_h \to \mathbb{R}$ del problema de Stokes satisface la condición BB discreta.Además, si $\boldsymbol{u} \in [\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)]^2$ y $p \in \mathrm{L}_0^2(\Omega) \cap \mathrm{H}^1(\Omega)$, entonces

$$\mathrm{dist}((\boldsymbol{u}, p), (H_h, Q_h)) \leq Ch$$

Lema de Fortin.

Lema de Fortin. Sean H y Q espacios de Hilbert. Sea $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Supongamos que b cumple la condición BB continua. Sean H_h y Q_h espacios de dimensión finita de H y Q respectivamente.
$b : H_h \times Q_h$ cumple la condición BB discreta si y solo si existe $\gamma > 0$ independiente de h, tal que para todo $v \in H$ existe $\Pi_h(v) \in H_h$ tal que

$$b(v, q_h) = b(\Pi_h(v), q_h) \ \forall q_h \in Q_h, \quad \text{y} \quad \|\Pi_h(v)\| \leq \gamma \|v\|_H .$$

Teorema. Sean H_h y Q_h los subespacios de elementos finitos de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)^2$ y $\mathrm{L}_0^2(\Omega)$ definidos en la diapositiva anterior (mini-elementos). La forma bilineal $b : H_h \times Q_h \to \mathbb{R}$ del problema de Stokes satisface la condición BB discreta. Además, si $\boldsymbol{u} \in [\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)]^2$ y $p \in \mathrm{L}_0^2(\Omega) \cap \mathrm{H}^1(\Omega)$, entonces

$$\mathrm{dist}((\boldsymbol{u}, p), (H_h, Q_h)) \leq Ch$$

Lema de Fortin.

Lema de Fortin. Sean H y Q espacios de Hilbert. Sea $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada. Supongamos que b cumple la condición BB continua. Sean H_h y Q_h espacios de dimensión finita de H y Q respectivamente.
$b : H_h \times Q_h$ cumple la condición BB discreta si y solo si existe $\gamma > 0$ independiente de h, tal que para todo $v \in H$ existe $\Pi_h(v) \in H_h$ tal que

$$b(v, q_h) = b(\Pi_h(v), q_h) \ \forall q_h \in Q_h, \quad \text{y} \quad \|\Pi_h(v)\| \leq \gamma \, \|v\|_H .$$

Teorema. Sean H_h y Q_h los subespacios de elementos finitos de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)^2$ y $\mathrm{L}_0^2(\Omega)$ definidos en la diapositiva anterior (mini-elementos). La forma bilineal $b : H_h \times Q_h \to \mathbb{R}$ del problema de Stokes satisface la condición BB discreta.Además, si $\boldsymbol{u} \in [\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)]^2$ y $p \in \mathrm{L}_0^2(\Omega) \cap \mathrm{H}^1(\Omega)$, entonces

$$\mathrm{dist}((\boldsymbol{u}, p), (H_h, Q_h)) \leq Ch$$

Algunas referencias

- D. Braess *Finite elements: Theory, fast solvers and applications in solid mechanics*, cambridge University Press, 2002.
- E. Alexandre and J.-L. Guermond, *Theory and practice of finite elements*, Springer, New York, 2004.
- P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, SIAM, 2002.
- V. Girault and P. A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier Stokes Equations*, Springer, New York, 1986.
- P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford Clarendon Press, 2003.
- A. Quarteroni and A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/A-B*, Springer-Verlag, New York, 1990.