Vol. XIII Nº 2 Diciembre (2005)
Matemáticas: 1–??

**Matemáticas:
Enseñanza Universitaria**

G-derivada y F-derivada en espacios topológicos localmente convexos (e.t.l.c)

Jhon Jairo Pérez Guillermo Restrepo

Recibido Ago. 18, 2005 Aceptado Oct. 27, 2005

Abstract

In this article we establish a precise relationship between the G-derivative and the F-derivative of a function $f : \Omega \to Y$, where X and Y are locally convex topological spaces ($l.c.t.v.s$) over the complex field and $\Omega \subseteq X$ is an open set. Expressing it in a more concrete way, what we do is to verify that Hartogs theorem is valid in infinite dimensional, complex topological vector spaces. We recall that Hartogs theorem says: If Ω is a connected open subset of $\mathbb{C}^n$ and $f : \Omega \to \mathbb{C}$ admits partial derivates at every point, then f is F-differentiable and hence continuos. We will show that if $f : \Omega \to Y$ is continuos in a point and G-differentiable at every point, X is a Baire, topological vector space and Y is sequentially complete $l.c.t.v.s$, then f es F-differentiable (infinite dimensional Hartogs theorem).

Keywords: Baire space, sequentially complete space.

AMSC(2000): Primary: 32C15, Secondary: 58C20.

Resumen

En este trabajo se establece una relación precisa entre la G-derivada y la F-derivada de una función $f : \Omega \to Y$, donde X y Y espacios vectoriales topológicos localmente convexos ($e.v.t.l.c$) sobre los complejos y $\Omega \subset X$ es abierto. En términos concretos, se trata de verificar la validez del teorema de Hartogs en dimension infinita. El teorema de Hartogs expresa: " Si Ω es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ admite derivadas parciales en cada punto, entonces f es F-diferenciable y por tanto es continua". Demostraremos que si $f : \Omega \to Y$ es continua en un punto y G-diferenciable, X es un $e.v.t.l.c$ que satisface la propiedad de Baire y Y es un $e.v.t.l.c$ secuencialmente completo, entonces f es F-diferenciable (teorema de Hartogs en dimensión infinita).

Palabras y frases claves: Espacio de Baire, espacio secuencialmente completo.

1 Introducción

El propósito de este trabajo es establecer la equivalencia de los conceptos G-derivada (G por Gateaux) y F-derivada (F por Fréchet) en ciertos espacios vectoriales topológicos localmente convexos ($e.v.t.l.c$) complejos de dimensión infinita. Recordemos unas definiciones. Sean X, Y $e.v.t.l.c$ y Ω un subconjunto abierto de X. Una función $f : \Omega \to Y$ es *G-diferenciable en* $a \in \Omega$ si el límite

$$Gf(a,h) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

existe para todo $h \in X$. Diremos que $h \mapsto Gf(a,h) = \varphi(h)$ es la *G-derivada de f en el punto a*. La función f es *F-diferenciable en* $a \in \Omega$ si existe una función lineal $u \in \mathcal{L}(X;Y)$ con la propiedad siguiente: para toda seminorma continua q en Y, existe una seminorma continua p en X tal que

$$\lim_{h\to 0, p(h)\neq 0} \frac{q(f(a+h)-f(a)-u(h))}{p(h)} = 0.$$

Es decir, para $\epsilon > 0$

$$q(f(a+h)-f(a)-u(h)) \leq \epsilon p(h),$$

para valores de $p(h)$ suficientemente pequeños. Existe a lo más una función lineal continua u con esta propiedad, a la cual llamaremos *F-derivada de f en el punto a* y escribiremos $u = Df(a)$. Diremos que f es *G-diferenciable* (resp. *F-diferenciable*) si es G-diferenciable en cada punto (resp. F-diferenciable en cada punto). Unas observaciones son pertinentes:

1. Si f es F-diferenciable, entonces es G-diferenciable, lo cual se obtiene al reemplazar en la última fórmula a h por $th, t \in \mathbb{C}$.

2. Si f es F-diferenciable en a, entonces f es continua en a.

3. Si $X = \mathbb{C}^n$ y $Y = \mathbb{C}$, entonces f es G-diferenciable si y sólo si es F-diferenciable, lo cual es consecuencia del teorema siguiente:

Teorema 1. (Teorema de Hartogs[1]) *Si Ω es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ admite derivadas parciales en cada punto, entonces f es F-diferenciable.*

En efecto, si f es G-diferenciable, entonces las derivadas parciales existen en cada $a \in \Omega$ puesto que

$$\partial_j f(a) = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}.$$

En el caso real, la existencia de las derivadas parciales no garantiza que f sea F-diferenciable, a menos que se añada la hipótesis de la continuidad de las derivadas parciales. El teorema de Hartogs implica que f es continua si las derivadas parciales existen y además que la G-derivada es una función lineal. El propósito inicial de este artículo lo podemos ahora reformular en términos más precisos. Nuestro objetivo es demostrar la siguiente generalización del teorema de Hartogs. Recordemos que un *e.v.t.l.c* es un espacio vectorial topológico cuya topología se puede definir por una familia numerable de seminormas. Un *e.v.t.l.c* satisface la propiedad de Baire si la intersección de toda familia numerable de subconjuntos densos y abiertos es un subconjunto denso (por ejemplo, si es metrizable y completo: espacio de Fréchet). Un espacio vectorial topológico es *secuencialmente completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Teorema 2. (Teorema de Hartogs en dimensión infinita) *Sean X, Y e.v.t.l.c, X espacio de Baire, Y secuencialmente completo y Ω un subconjunto abierto y conexo de X. Si $f : \Omega \to Y$ es continua en un punto y G-diferenciable, entonces es F-diferenciable.*

Los procedimientos para lograr la demostración se encuentran dispersos en los trabajos de J. Bochank y J. Siciak [2] y [3].

2 Demostración del teorema (??) cuando $X = \mathbb{C}^n$.

(i) Demostremos que la función $h \mapsto Gf(a,h) = \varphi(h)$ (G-derivada de f en $a \in \Omega$) de $\mathbb{C}^n$ en Y es lineal. Observemos que $u \circ f$ es una función G-diferenciable de $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}$ para toda $u \in Y'$ y por el teorema de Hartogs es F-diferenciable. Su derivada $D(u \circ f)(a)$ es una función lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}$. Ahora,

$$D(u \circ f)(a) \cdot h = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{u \circ f(a+th) - u \circ f(a)}{t} = u \circ \varphi(h).$$

Hemos así demostrado que $u \circ \varphi$ es lineal para toda $u \in Y'$ y ello implica que φ es lineal. En efecto,

$$u(\varphi(h+h')) = u(\varphi(h)) + u(\varphi(h')) = u(\varphi(h) + \varphi(h'))$$

y por tanto $\varphi(h+h') = \varphi(h) + \varphi(h')$. En forma similar se comprueba que $\varphi(\lambda h) = \lambda \varphi(h)$.

(ii) Demostremos ahora que

$$\lim_{h \to 0} \frac{q(\omega(h))}{||h||} = 0, \quad \text{donde} \quad \omega(h) = f(a+h) - f(a) - \varphi(h)$$

para toda seminorma continua q en Y. Sea $W = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| \leq \beta\}$, donde $||z|| = \sup_{1 \leq j \leq n} |z_j|$. Si β es suficientemente pequeño, entonces $a + W \subseteq \Omega$ por ser Ω abierto. Como $a + W$ es compacto y $u \circ f$ es continua para toda $u \in Y'$ en virtud del teorema de Hartogs, entonces

$$M_u = \sup_{z \in a+W} |u \circ f(z)| < \infty.$$

Consideremos la función

$$g(t) = f(a+tz), \quad ||z|| = \beta \quad \text{y} \quad |t| \leq 1.$$

Para cada $u \in Y'$, la función $u \circ g$ es una función con valores en $\mathbb{C}$, la cual es F-diferenciable. Por el teorema de representación de Cauchy de las funciones complejas diferenciables podemos escribir

$$u \circ g(t) - u \circ g(0) - D(u \circ g)(0) \cdot t = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \left(\frac{u \circ g(\xi)}{\xi - t} - \frac{u \circ g(\xi)}{\xi} - \frac{u \circ g(\xi)}{\xi^2} \cdot t \right) d\xi.$$

Por consiguiente,

$$|u \circ g(t) - u \circ g(0) - D(u \circ g)(0) \cdot t| \leq M_u 2|t|^2$$

si $|t| \leq \frac{1}{2}$ y $||z|| = \beta$. Observemos que $D(u \circ g)(0) = u \circ \varphi(z)$. Por consiguiente hemos demostrado que el subconjunto

$$\left\{ \frac{g(t) - g(0) - \varphi(tz)}{t^2} : 0 < |t| \leq \frac{1}{2}, \quad ||z|| = \beta \right\}$$

de Y es acotado en la topología débil $\sigma(Y, Y')$ y por tanto en la topología original. Es decir para toda seminorma continua q en Y existe una constante M_q tal que

$$q(g(t) - g(0) - \varphi(tz)) \leq M_q 2|t|^2$$

si $|t| \leq \frac{1}{2}$ y $||z|| = \beta$. Como todo h tal que $||h|| \leq \frac{\beta}{2}$ es de la forma $h = tz$ con $|t| \leq \frac{1}{2}$ y $||z|| = \beta$, entonces

$$q(f(a+h) - f(a) - \varphi(h)) \leq M_q \frac{2}{\beta^2} ||h||^2$$

lo que demuestra que $\lim_{h \to 0} \frac{q(\omega(h))}{||h||} = 0$. ∎

Observación. Cuando $X = \mathbb{C}^n$ no se requiere la hipótesis de continuidad de f en algún punto. Basta asumir la existencia de las derivadas parciales para concluir que f es F-diferenciable. Para demostrar lo anterior se necesita el siguiente Lema:

Lema 3. *Sean $\Omega = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq \beta\}$ y Y un e.v.t.l.c secuencialmente completo. Si $\psi : \Omega \to Y$ es una función tal que $u \circ \psi : \Omega \to \mathbb{C}$ es G-diferenciable para toda $u \in Y'$, entonces ψ es G-diferenciable.*

Proof. En este caso los conceptos de G-diferenciabilidad y F-diferenciabilidad son equivalentes, hablaremos simplemente de diferenciablilidad. Como $u \circ \psi$ es diferenciable, entonces es dos veces diferenciable (más aún, analítica) y por tanto es de la forma

$$(u \circ \psi)(t) = (u \circ \psi)(0) + c_1 t + c_2 t^2 + r(t) t^2$$

donde

$$\lim_{t \to 0} r(t) = 0, \quad c_1 = \frac{d}{dt}(u \circ \psi)(t)\Big|_{t=0} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}(u \circ \psi)(t)\Big|_{t=0}.$$

Como $r(t)$ es continua (redefiniendo $r(0) = 0$) entonces existe una constante α que depende de u tal que $|r(t)| \leq \alpha$. Podemos ahora escribir,

$$\begin{aligned} \left| u \circ \left(\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} - \frac{\psi(\tau) - \psi(0)}{\tau} \right) \right| &= |c_2(t - \tau) + r(t)t - r(\tau)\tau| \\ &\leq M_u(|t| + |\tau|) \end{aligned}$$

donde $M_u = |c_2| + \alpha$. Hemos así demostrado que el subconjunto de Y

$$\left\{ \left(\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} - \frac{\psi(\tau) - \psi(0)}{\tau} \right) (|t| + |\tau|)^{-1} : 0 < |t|, |\tau| \leq \beta \right\}$$

es acotado en la topología débil $\sigma(Y, Y')$ y por tanto es acotado en la topología inicial de Y. Luego para toda seminorma continua q en Y existe una constante M_q tal que

$$q \left(\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} - \frac{\psi(\tau) - \psi(0)}{\tau} \right) \leq M_q(|t| + |\tau|).$$

Por consiguiente si $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a cero, entonces $\left(\frac{\psi(t_n) - \psi(0)}{t_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y, la cual converge porque Y es secuencialmente completo. En suma, existe el límite cuando $t \to 0$ de $\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t}$ y por tanto ψ es diferenciable. □

Teorema 4. *Sean Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}^n$ y Y un e.v.t.l.c secuencialmente completo. Si las derivadas parciales de una función $f : \Omega \to Y$ existen, entonces f es F-diferenciable.*

Proof. Para cada $u \in Y'$, las derivadas parciales de $u \circ f$ existen y están dadas por $\partial_j(u \circ f)(a) = u \circ \partial_j f(a)$. Por el teorema (**??**), la función $u \circ f$ es F-diferenciable y con mayor razón G-diferenciable. Por el lema anterior, f es G-diferenciable. En efecto, si fijamos $z \in \mathbb{C}$. entonces $a + tz \in \Omega$ si t es suficientemente pequeño, digamos $|t| \leq \beta$. La función $\phi(t) = f(a + tz)\,(|t| \leq \beta)$, satisface las condiciones del lema y por tanto es G-diferenciable. Luego f es G-diferenciable y por lo demostrado al principio de esta sección, f es F-diferenciable. □

3 Demostración del teorema (??) en el caso general.

Si X, Y son *e.v.t.l.c*, Ω es un subconjunto abierto de X y $f : \Omega \to Y$ es una función G-diferenciable, entonces la función $t \mapsto f(a + th) = g(t)$ es diferenciable en $\{t : |t| \leq r\}$, donde $r < 1$. Por tanto podemos definir inductivamente para cada $a \in \Omega$ y todo $h \in X$

$$G^0 f(a, h) = f(a) \qquad \text{y} \qquad G^n f(a, h) = \left. \frac{d^n}{dt^n} f(a + th) \right|_{t=0}.$$

Antes de proceder a la demostración del teorema (**??**) demostraremos varios resultados auxiliares.

Proposición 5. *Sean X, Y e.v.t.l.c y Ω un subconjunto abierto de X. Si $f : \Omega \to Y$ es G-diferenciable, entonces la función $h \mapsto G^n f(a, h)$ es un polinomio homogéneo de grado n. Este polinomio homogéneo es continuo si f es continua en a.*

Proof. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función

$$(t_1, t_2, ..., t_n) \mapsto f(a + t_1h_1 + t_2h_2 + \cdots t_nh_n), \quad h_k \in X,$$

definida para todo t en una vecindad de cero en $\mathbb{C}^n$. Demostraremos que la función

$$l(h_1, ..., h_n) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 ... \partial t_n} f\left(a + \sum_{k=1}^{n} t_kh_k\right)\Bigg|_{t=0}$$

es una función multilineal. El enunciado es cierto si $n = 1$ y luego se demuestra inductivamente teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}(X; \mathcal{L}_{k-1}(X; Y)) = \mathcal{L}_k(X; Y).$$

Es inmediato que $l(h, ..., h) = G^n(a, h)$.

Resta demostrar que $h \mapsto f_n(h) = G^n f(a, h)$ es continuo si f es continua en a. Basta demostrar que es continuo en 0_X. Sea q una seminorma continua en Y. Como la función $h \mapsto q \circ f(a + h)$ es continua en $h = 0$, existe una vecindad balanceada V de 0_X tal que $q \circ f(a + h) \leq 1$ para todo $h \in V$. La función $t \mapsto f(a + th) = g(t)$ es diferenciable en $\{t : |t| \leq r\}$, donde $r < 1$. Localmente f tiene la representación integral

$$g(t) = f(a + th) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a + \zeta h)}{\zeta - t} d\zeta, \quad |t| \leq \frac{r}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{d^n}{dt^n} g(t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a + \zeta h)}{(\zeta - t)^{n+1}} d\zeta, \quad |t| \leq \frac{r}{2}.$$

Al evaluar en $t = 0$ se obtiene

$$q \circ \frac{d^n}{dt^n} g(0) = q \circ G^n f(a, h) \leq \frac{n!}{r^n} = M_n \quad \text{para todo} \quad h \in V.$$

Por eso el polinomio $f_n(h) = G^n f(a, h)$ es continuo en $h = 0$. $\square$

Proposición 6. *Sean X, Y e.v.t.l.c, $\Omega \subset X$ abierto y conexo. Supongamos que Y es secuencialmente completo. Si $f : \Omega \to Y$ es G-diferenciable y continua en $a \in \Omega$, entonces existe una vecindad balanceada V de 0_X y una familia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de polinomios homogéneos continuos de grado n y*

$$f(a + h) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} f_n(h) \quad \textit{para todo} \quad h \in V.$$

Proof. Sea $h \in V$. La función $t \mapsto f(a+th)$ definida si $|t| \leq r$, donde $r > 1$, se puede representar por medio de la serie

$$f(a+th) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{G^n f(a,h)}{n!} t^n, \quad |t| \leq 1.$$

Por la proposición (**??**), $f_n(h) = \frac{G^n f(a,h)}{n!}$ es un polinomio homogéneo y continuo de grado n. Luego $f(a+h) = \sum f_n(h)$ para todo $h \in V$ si $t = 1$. □

Proposición 7. *Sean X, Y e.v.t.l.c, X espacio de Baire, Y secuencialmente completo y f_n un polinomio homogéneo y continuo de grado n de X en Y, $n \in \mathbb{N}_0$. Si la serie formal $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n$ converge puntualmente en una vecindad V de 0_X, entonces la función*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n(x), \quad x \in V, \quad \textit{es continua en} \quad 0_X.$$

Proof. Podemos suponer que V es abierta y balanceada. Sea q una seminorma continua en Y. Por la convergencia puntual de la serie $\sum f_n$ en V, $f_n(x) \to 0_Y$ para cada $x \in V$ y por tanto $q \circ f_n(x) \to 0_Y$ para cada $x \in V$. Por tanto la sucesión $(q \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es puntualmente acotada en V, es decir, para cada $x \in V$ existe $M_x > 0$ tal que $q \circ f_n(x) \leq M_x$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Como X es un espacio de Baire y $V \subset X$ es abierto, entonces V es un espacio de Baire y por tanto $(q \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una familia de funciones continuas uniformemente acotada en un abierto $A \subseteq V$, es decir, existe un $M > 0$ tal que $q \circ f_n(x) \leq M$ para todo $x \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}_0$. El conjunto $W = \cup_{|t|\leq 1} tA$, es una vecindad abierta y balanceada de 0_X y $W \subseteq V$. Si $x \in \frac{1}{2}W$ entonces $q \circ f_n(x) = q \circ f_n(\frac{y}{2}) = 2^{-n} q \circ f_n(y) \leq 2^{-n} M$, por consiguiente

$$q \circ f(x) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} q \circ f_n(x) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} 2^{-n} M \leq 2M, \quad x \in \frac{1}{2}W.$$

Luego dado $\epsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>k} q \circ f_n(x) \leq \epsilon/2$ si $x \in \frac{1}{2}W$. Observemos que

$$q(f(x) - f(0)) \leq \sum_{n=1}^{k} q \circ f_n(x) + \sum_{n\geq k+1}^{\infty} q \circ f_n(x), \qquad x \in \frac{1}{2}W.$$

Para cada r tal que $1 \leq r \leq k$ existe una vecindad $U_r \subseteq \frac{1}{2}W$ tal que $q \circ f_r(x) \leq \frac{\epsilon}{2k}$ puesto que cada f_r es una función continua. Por consiguiente

$$q(f(x) - f(0)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \in U = \bigcap_{1\leq r\leq k} U_r$$

que es una vecindad de cero. Por eso f es continua en 0_X. □

Proposición 8. *Sean Ω un subconjunto abierto y conexo de un e.v.t y A un subconjunto abierto y no vacío de Ω. Si $a + W \subset A$ para todo $a \in A$ y toda vecindad balanceada W de cero tal que $a + W \subset \Omega$, entonces $A = \Omega$.*

Proof. Por contradicción supongamos que $A \neq \Omega$. Como A es no vacío y Ω es conexo, entonces $fr(A)$ (frontera de A en Ω) es no vacía. Sea $b \in fr(A)$. Existe una vecindad balanceada W de cero tal que $b + W + W \subset \Omega$. Existe un $a \in A$ tal que $a \in b + W$ y por tanto $a + W \subset b + W + W \subset \Omega$. Por la hipótesis de la proposición concluimos que $a + W \subset A$. Pero $a = b + w$ para algún $w \in W$ y como W es balanceado, entonces $b = a + (-w) \in a + W \subset A$, lo que contradice $b \in fr(A)$. $\square$

Procederemos a la demostración del teorema (**??**). Nuestro propósito inicial es demostrar que f es continua en Ω.

Proof. Sea A el conjunto de los $\omega \in \Omega$ en los cuales f es continua. $A \neq \emptyset$ porque f es continua por lo menos en un punto. A es abierto pues si $a \in A$, entonces existe una vecindad abierta V de 0_X tal que $q \circ f$ es acotada en $a + V$ para toda seminorma continua q en Y. Si $x \in a + V$, entonces $a + V$ es una vecindad de x en la cual $q \circ f$ es acotada y por tanto f es continua en x. Sean $a \in A$ y W una vecindad balanceada de 0_X tal que $a + W \subset \Omega$. Si demostramos que $a + W \subset A$, entonces $A = \Omega$ en virtud de la proposición (**??**). Sea $z = a + h$, $h \in W$. Existe una vecindad abierta y balanceada V de 0_X tal que $z + u \in \Omega$ para todo $u \in V$. Note que $t \mapsto f(a + th)$ está definida en $\{t : |t| \leq r\}$ para algún $r < 1$. Por tanto $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{G^n f(a,h)}{n!} t^n$ converge uniformemente en $\{t : |t| < 1\}$ y

$$f(a + h) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n(h), \quad f_n(h) = \frac{G^n f(a, h)}{n!}.$$

Los polinomios f_n son continuos porque f es continua en a en virtud de la proposición (**??**). Consideremos la función $t \mapsto f(a + h + tu)$, donde $u \in V$ y $|t| \leq 1$. Esta función es diferenciable y $f(a + h + tu) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n(h + tu)$. La convergencia es uniforme en $\{t : |t| \leq 1\}$, por tanto

$$G^k f(a + h, u) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} G^k f_n(h, u).$$

Ahora $u \mapsto G^k f_n(h, u)$ es un polinomio homogéneo de grado k. Este polinomio es continuo porque $h \mapsto f_n(h)$ es un polinomio continuo. Ahora bien, la suma infinita de polinomios homogéneos y continuos del mismo grado es un polinomio continuo. Luego $u \mapsto G^k f(a+h, u)$ es un polinomio homogéneo y continuo de grado k. Por consiguiente,

$$g(u) = f(a + h + u) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \varphi_k(u), \quad \varphi_k(u) = \frac{G^k f(a + h, u)}{k!}.$$

El polinomio φ_k es continuo para cada k y por tanto la función g es continua en $u = 0$ en virtud de la proposición (**??**). Por consiguiente f es continua en $z = a + h$ puesto que $q(f(a+h+u) - f(a+h)) = q(g(u) - g(0))$ tiende a cero cuando u tiende a cero. Hemos así demostrado la continuidad de f en Ω. Ahora,

$$f(a+h) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{G^n f(a,h)}{n!} \quad h \in W$$

donde

$$\frac{1}{n!}G^n f(a,h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{f(a+\xi h)}{\xi^{n+1}} d\xi \quad h \in W.$$

Dada una seminorma continua q en Y existe una seminorma p en X tal que $p(h) \leq 1$ implica $a+h \in \Omega$ y $\frac{1}{n!}q(G^n f(a,h)) \leq M$ en virtud de la proposición (**??**) donde $M = \sup_{p(h)\leq 1} q(f(a+h)) < \infty$. Por tanto

$$p(h) \leq \alpha < 1 \quad \text{implica} \quad q(f(a+h) - f(a) - G^1 f(a,h)) \leq M \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k$$

como $\sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$. Entonces si $p(h) = \alpha \leq \frac{\epsilon}{M+\epsilon}$ implica

$$q(f(a+h) - f(a) - G^1 f(a,h)) \leq \epsilon p(h).$$

Hemos así demostrado que $G^1 f(a,\cdot) = Df(a)$. $\square$

4 Observaciones Finales

La hipótesis de la continuidad de f en un punto por lo menos en el teorema de Hartogs en dimensión infinita teorema (**??**) es necesaria. Por ejemplo, si X es un espacio de Banach de dimensión infinita y si $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto linealmente independiente tal que $||a_n|| = 1$ para todo n, entonces existe una función lineal $f : X \to \mathbb{C}$ tal que $f(a_n) = n$. Esta función lineal no es continua en ningún punto, pues no es acotada en la bola unitaria. No obstante es G-diferenciable, $Gf(a,h) = f(h)$ para toda $a \in X$, mas no es F-diferenciable en ningún punto.

La G-derivada en general no es lineal, aunque satisface la relación de homogeneidad $Gf(a,\lambda h) = \lambda Gf(a,h)$ para todo escalar λ. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^2$ y f es la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

esta función es G-diferenciable en todo punto pero la G-derivada en $(0,0)$ no es lineal ni continua. Más aún f no es continua en $(0,0)$.

Si $X = \mathbb{R}^2$ y f es la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

entonces f es G-diferenciable en todo punto y continua pero no es F-diferenciable en $(0,0)$. Es decir, en el caso real la G-diferenciabilidad no implica la F-diferenciabilidad aun si f es continua.

Nos preguntamos si toda función continua definida en $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}$ y G-diferenciable es F-diferenciable en algún punto.

References

[1] Narasimhan R.: Several Complex Variables. University of Chicago Press, 1971.

[2] Bochnak J., Siciak J.: Polynomials and Multilinear Mappings in Topological Vector Spaces. Studia Math, 1971, pp. 59-76.

[3] Bochnak J., Siciak J.: Analytic Functions in Topological Vector Spaces. Studia Math, 1971, pp. 77-112.

[4] Hervé M. : Analyticity in Infinite Dimensional Spaces. Walter de Gruyter, 1989.

[5] Seán Dineen: Complex Analysis in Locally Convex Spaces. North-Holland Mathematics Studies, 1981.

Dirección de los autores: Jhon Jairo Pérez Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Calle 13 No. 100-00, Cali-Colombia. — Guillermo Restrepo Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Calle 13 No. 100-00, Cali-Colombia.
guires@univalle.edu.co,guires@emcali.net.co